



ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЗДРАВООХРАНЕНИИ

*Совместный научно-практический семинар
МИЭМ НИУ ВШЭ и
Лаборатории управления общественным здоровьем ИПУ РАН*

Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ, 14-06-2023

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Московский институт электроники и математики

**МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР В
ЗАДАЧЕ НОРМАЛИЗАЦИИ УРОВНЯ
ГЛЮКОЗЫ В КРОВИ**

Валерий Николаевич Афанасьев

Постановка задачи

Обзор состояния проблемы

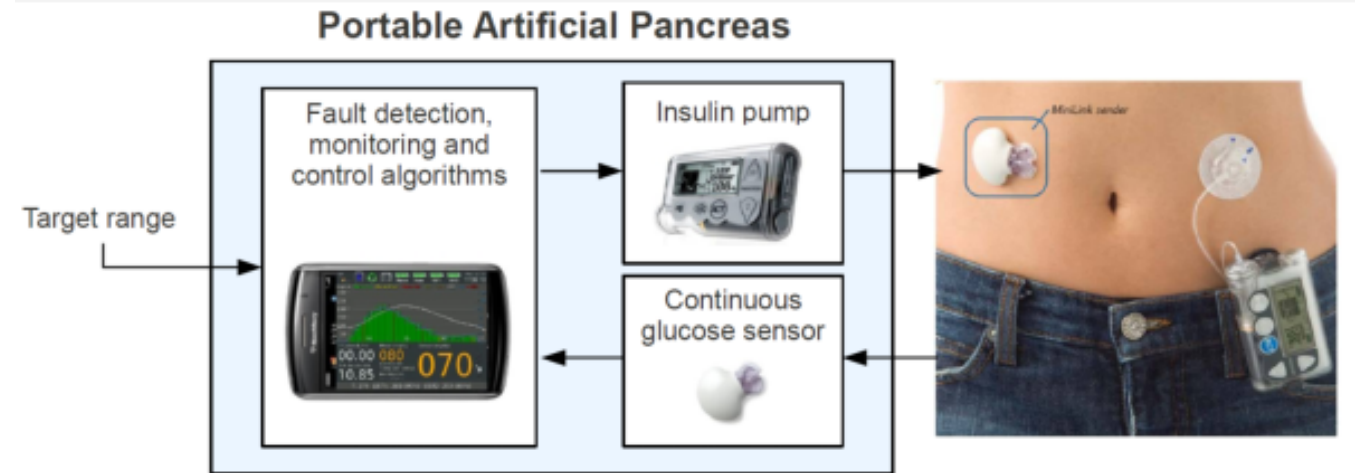
Дифференциальные игры

SDRE

Алгебраический метод

Математическое моделирование

Рассматривается нелинейная дифференциальная система уравнений, описывающая поведение системы “глюкоза-инсулин”. Необходимо произвести синтез управляющих воздействий для нормализации уровня глюкозы в крови больного сахарным диабетом 1 рода с применением теории дифференциальных игр.



Постановка
задачи

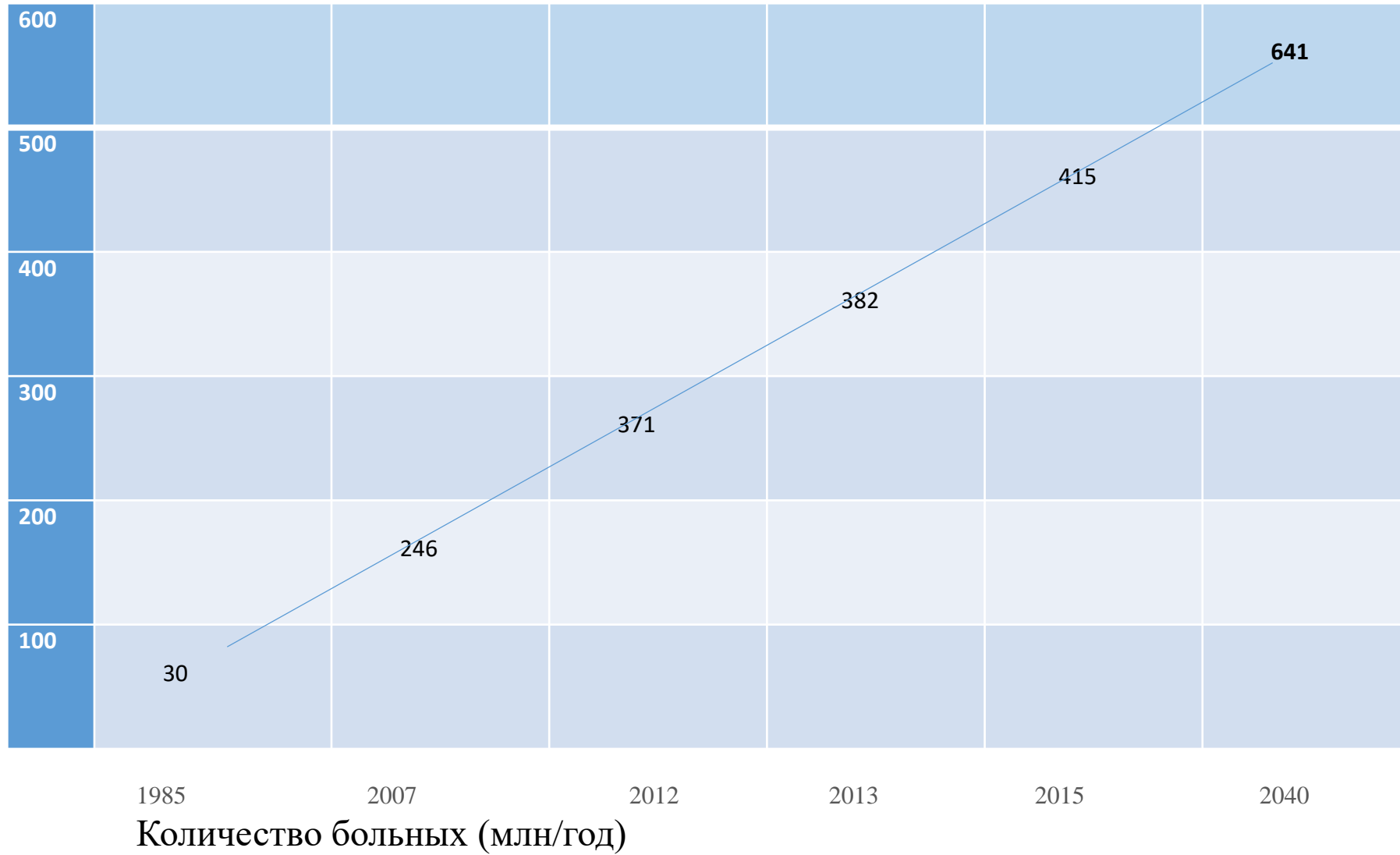
Обзор состояния
проблемы

Дифференциальные
игры

SDRE

Алгебраический
метод

Математическое
моделирование



Популярные методы решения:

01 ПИД-регулятор

02 Модель прогнозирующего
управления (MPC)

03 Искусственный интеллект

Математические модели:

Минимальная модель Бергмана

$$\begin{aligned}\dot{G}(t) &= -p_1[G(t) - G_b] - X(t)G(t) + D(t), \\ G(0) &= G_0, \\ X(t) &= -p_2X(t) + p_3[I(t) - I_b], \\ X(0) &= 0, \\ \dot{I}(t) &= \gamma[G(t) - h]^+ - n[I(t) - I_b] + u(t), \\ I(0) &= I_0,\end{aligned}$$

Модель Novorka-Wilinska

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1(t)}{dt} &= -[F_{01}^c(t) + x_1(t)Q_1(t)] + k_{12}Q_2(t) - F_R(t) + U_G(t) + \\ \frac{dQ_2(t)}{dt} &= x_1(t)Q_1(t) - [k_{12} + x_2(t)]Q_2(t), \quad + EGP_0[1 - x_3(t)] \\ \frac{dS_1(t)}{dt} &= u(t) - \frac{S_1(t)}{t_{max,I}} \\ \frac{dS_2(t)}{dt} &= \frac{S_1(t)}{t_{max,I}} - \frac{S_2(t)}{t_{max,I}} \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{U_1(t)}{V_I} - k_e I(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &= -k_{a1}x_1(t) + k_{b1}I(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -k_{a2}x_2(t) + k_{b2}I(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -k_{a3}x_3(t) + k_{b3}I(t)\end{aligned}$$

Модель Kanderian

$$\begin{aligned}\frac{dI_{sc}(t)}{dt} &= -\frac{I_{sc}(t)}{t_1} + \frac{ID(t)}{Ct_1} \\ \frac{dI_p(t)}{dt} &= -\frac{I_p(t)}{t_2} + \frac{I_{sc}(t)}{t_2} \\ \frac{dI_{EFF}(t)}{dt} &= -p_2I_{EFF}(t) + p_2S_I I_p(t) \\ \frac{dG(t)}{dt} &= -(GEZI + I_{EFF}(t))G(t) + EGP + R(t) \\ \frac{dG_{ISF}(t)}{dt} &= -\frac{G_{ISF}(t)}{t_{SEN}} + \frac{G(t)}{t_{SEN}} \\ R(t) &= \frac{c_H(t)te^{-\frac{t}{\tau_m}}}{V_g \tau_m^2}\end{aligned}$$

Неопределенные системы: динамические системы с неполной информацией о состоянии, параметрах и взаимодействии со средой.

Классы объектов: детерминированные, стохастические, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Приметы медико-биологические объекты, технологические и различные технические объекты, подвижные объекты и т.п.

Методы синтеза и анализа управляемых систем с полной информацией:

Методы условной оптимизации (вариационное исчисление, принцип максимума Л.С. Понтрягина, Динамическое программирование: схемы Беллмана, Моисеева).

Дифференциальные (позиционные) игры как задачи оптимального управления.

2. Задача управления нелинейным объектом при действии возмущающих сил

2.1. Постановка задачи

Пусть детерминированная управляемая нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))u(t) + g_2(x(t))w(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

$$y(t) = C(t)x(t),$$

$$u(t) = \left\{ u(\cdot) \in R^r, t \in [t_0, t_f] \right\} - \text{управление}, \quad w(t) = \left\{ w(\cdot) \in R^k, t \in [t_0, t_f] \right\} - \text{внешнее возмущение}.$$

Векторы и матрицы $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ – непрерывные функции.

П р е д п о л о ж е н и е 2.1. Непрерывные функции $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ такие,

что при любых $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Omega_x$ проходит одно и только одно решение уравнения (2.1)

$x(t, t_0, x_0)$.

Предположение 2.2. Управления $u(t)$ и $w(t)$ реализуются с использованием обратной связи по состоянию объекта и желаемого выхода, т.е.

$$u(t) = u(t, \varepsilon(t)), \quad w(t) = w(t, \varepsilon(t)). \quad (2.2)$$

Рассматривая возмущение $w(t)$ как действие некоторого игрока, противодействующее успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков G_u и G_w . Задача дифференциальной игры рассматривается как проблема оптимального управления, т.е. игра с нулевой суммой.

Предположение 2.3. Управляющее воздействие и возмущение удовлетворяют следующим ограничениям:

$$u^T(t)Ru(t) = \|u(t)\|_R^2 \leq E_u, \quad w^T(t)Pw(t) = \|w(t)\|_P^2 \leq E_w. \quad (2.3)$$

Для оценки действий игроков введем функционал качества

$$J(\varepsilon(\mathcal{U}), u(\mathcal{U}), w(\mathcal{U})) = \lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow 0}} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) - w^T(t) P w(t) \} dt, \quad (2.4)$$

$Q \succ 0, R \succ 0, P \succ 0.$

Предположение 2.4. Об условиях существования оптимального решения задачи (2.1) - (2.4). Для того чтобы записать условия, которым должны удовлетворять оптимальные управления $u^0(t) = u^0(t, x(t))$ и $w^0(t) = w^0(t, x(t))$ для игроков G_u и G_w , предположим, что такие управления существуют и $x^0(t)$ - соответствующая этим управлениям траектория.

Запишем гамильтониан

$$H(x, u, w, \lambda) = \frac{1}{2} \left[x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) - w^T(t) P w(t) \right] + \lambda^T(t) \left[f(x(t)) + g_1(x(t)) u(t) + g_2(x(t)) w(t) \right]. \quad (2.5)$$

Необходимые и достаточные условия минимума задачи при отсутствии ограничений вида (2.3):

$$\begin{aligned} \partial H(x, u, w, \lambda) / \partial u = 0, \quad \partial H(x, u, w, \lambda) / \partial w = 0, \quad \partial^2 H(x, u, w, \lambda) / \partial u^2 \neq 0, \quad \partial^2 H(x, u, w, \lambda) / \partial w^2 \neq 0, \\ u(t) = -R^{-1} g_1^T(x(t)) \lambda(t), \quad w(t) = P^{-1} g_2^T(x(t)) \lambda(t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) определяют возможное описание оптимальных управлений, но для последнего требуется выполнение наложенных ограничений (2.3).

Объект с управлениями (2.6) будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t))\lambda(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.7)$$

Здесь

$$\Pi(x(t)) = g_1(x(t))R^{-1}g_1^T(x(t)) - g_2(x(t))P^{-1}g_2^T(x(t)) \quad (2.8)$$

Условие положительно полуопределенности матрицы $\Pi(x(t))$ гарантирует выполнение условий (2.3).

С учетом введенных управлений перепишем выражение для функционала качества

$$J(x(\cdot), \lambda(\cdot)) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t)Qx(t) + \lambda^T(t)\Pi(x(t))\lambda(t)\} dt \quad (2.9)$$

Этот функционал в новой постановке задачи эквивалентен функционалу (2.4).

Для определения ряда свойств задачи, введем функцию Беллмана

$$V^0(x(t)) = J(x^0(\cdot), \lambda^0(\cdot)) \quad (2.10)$$

где

$$\frac{\partial V^0(x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V^0(x(t))}{\partial x} f(x(t)) - \frac{1}{2} \lambda^T(t) \Pi(x) \lambda(t) + \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) = 0, \quad (2.11)$$

$$x(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f].$$

Утверждение 2.1. Дифференциальная игра (2.1)–(2.4) с нулевой суммой имеет решение, если ограничения (2.3) связаны соотношением

$$E_u > E_w. \quad (2.12)$$

Т е о р е м а 2.1. Пусть имеется система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t))\lambda(t), \quad x(t_0) = x_0$$

где $\Pi(x(t))$ неотрицательная матрица. Вектор – функция $\lambda(t) \in R^n$ доставляет минимум функционалу (2.9) на решениях этой системы, т.е.

$$J(x^0(\cdot), \lambda^0(\cdot)) \leq J(x(\cdot), \lambda(\cdot)).$$

Вектор $\lambda(t)$ отыскивается решением уравнения

$$\frac{\partial V^0(x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V^0(x(t))}{\partial x} f(x(t)) - \frac{1}{2} \lambda^T(t) \Pi(x) \lambda(t) + \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) = 0,$$

$$x(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f].$$

Алгебраический метод синтезе

Рассмотрим скалярное нелинейное функциональное уравнение:

$$\gamma^T(\eta)\mu(\eta) - \frac{1}{2}\gamma^T(\eta)\Pi(\eta)\gamma(\eta) + \frac{1}{2}\alpha(\eta) = 0 \quad (3.1)$$

Лемма 1. Уравнение (3.2) имеет решение относительно $\gamma(\eta)$ в виде

$$\gamma(\eta) = \Pi^+(\eta)\mu(\eta) + K^+(\eta)(\mathbf{1}_n \otimes \beta(\eta)), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{1}_n$ – вектор столбец размера n с элементами, равными 1, \otimes – произведение Кронекера,

$$\beta(\eta) = \left\{ \frac{1}{n} \left[\mu^T(\eta) \{ \Pi^+(\eta) \}^T \mu(\eta) + \alpha(\eta) \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.3)$$

Используем результаты леммы 2 для рассматриваемой в статье задачи слежения.

Сравнивая

$$\frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} f(x(t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \Pi(x(t)) \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) = 0$$

$$\text{и } \gamma^T(\eta) \mu(\eta) - \frac{1}{2} \gamma^T(\eta) \Pi(\eta) \gamma(\eta) + \frac{1}{2} \alpha(\eta) = 0,$$

будем иметь

$$\gamma(\eta) = \gamma(t) = \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T, \quad \mu(\eta) = f(x(t)), \quad \alpha(\eta) = \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t), \quad \Pi(\eta) = \Pi(x(t)).$$

С учетом введенных обозначений уравнение Беллмана – Айзекса принимает вид

$$\gamma^T(t) f(x(t)) - \frac{1}{2} \gamma^T(t) \Pi(x(t)) \gamma(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) = 0. \quad (3.4)$$

Решением уравнения

$$\gamma^T(t) f(x(t)) - \frac{1}{2} \gamma^T(t) \Pi(x(t)) \gamma(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) = 0$$

относительно функции $\gamma(t) \in R^n$ является:

$$\gamma(t) = \Pi^+(x(t)) f(x(t)) + K^+(x(t)) (I_n \otimes \beta(x(t), \varepsilon(t))), \quad (3.5)$$

где $\beta(x(t), \varepsilon(t))$ скалярная функция определяется решением уравнения

$$\beta(x(t), \varepsilon(t)) = \left\{ \frac{1}{n} \left[f^T(x(t)) \Pi^+(x(t)) f(x(t)) + \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) \right] \right\}^{1/2}. \quad (3.6)$$

Теорема 2. Пусть имеется система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t))\gamma(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $\Pi(x(t))$ – вырожденная неотрицательная матрица. Вектор – функция $\gamma(t) \in R^n$ доставляет минимум функционалу

$$J(x(\cdot), \gamma(\cdot)) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) + \gamma^T(t) \Pi(x(t)) \gamma(t) \right\} dt$$

на решениях системы.

Запишем управления $u^0(t)$ и $w^0(t)$

$$u^0(t) = -R^{-1} g_1^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) - R^{-1} g_1^T(x(t)) K^{-1}(x(t)) \left(\mathbf{1}_n \otimes \left\{ \frac{1}{n} \left[f^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) \right] \right\}^{1/2} \right), \quad (3.7)$$

$$w^0(t) = P^{-1} g_2^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + P^{-1} g_2^T(x(t)) K^{-1}(x(t)) \left(\mathbf{1}_n \otimes \left\{ \frac{1}{n} \left[f^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) \right] \right\}^{1/2} \right). \quad (3.8)$$

Система (3.1) с управлениями $u^0(t)$ и $w^0(t)$ принимает вид

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) - I^* f(x(t)) - K(x(t)) (\mathbf{1}_n \otimes \beta(x(t), \varepsilon(t))), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.9)$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где I^* диагональная матрица, содержащая в диагонали t нулевых элементов и $n - t$ единичных элементов.

В предыдущем разделе исходная система с оптимальными управлениями была представлена в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t)) \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T, \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.1)$$

Используя метод SDC и записывая $\left\{ \partial V^0(x(t)) / \partial x \right\}^T = S(x(t))x(t)$, представим это уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A(x(t)) - \Pi(x(t))S(x(t))]x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.2)$$

Здесь матрица $S(x(t))$ является решением уравнения SDRE

$$A^T(x(t))S(x(t)) + S(x(t))A(x(t)) - S(x(t))\Pi(x(t))S(x(t)) + Q = 0. \quad (4.3)$$

Постановка задачи

Обзор состояния проблемы

Дифференциальные игры

SDRE

Алгебраический метод

Математическое моделирование

Модель S. Kanderian

$$\frac{dI_{SC}(t)}{dt} = -\frac{I_{SC}(t)}{t_1} + \frac{ID(t)}{Ct_1},$$

$$\frac{dI_p(t)}{dt} = -\frac{I_p(t)}{t_2} + \frac{I_{SC}(t)}{t_2},$$

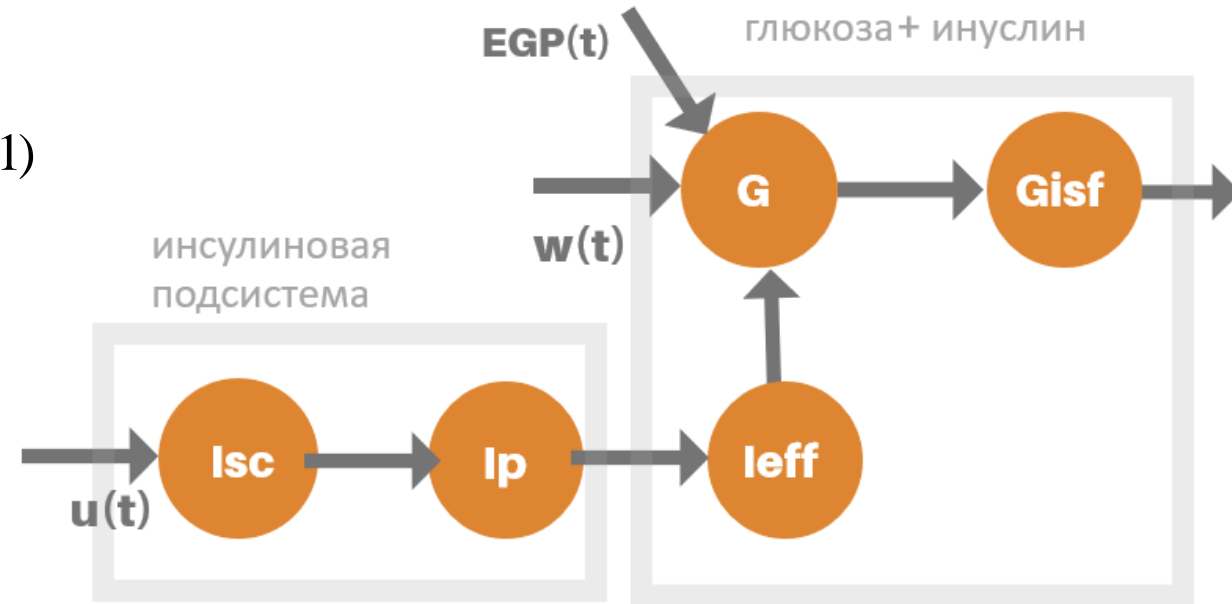
$$\frac{dI_{EFF}(t)}{dt} = -p_2 I_{EFF}(t) + p_2 S_I(t) I_p(t),$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = -(GEZI + I_{EFF}(t))G(t) + EGP(t) + R(t),$$

$$\frac{dG_{ISF}(t)}{dt} = -\frac{G_{ISF}(t)}{t_{SEN}} + \frac{G(t)}{t_{SEN}},$$

$$R(t) = \frac{C_H(t)}{v_g \tau_m^2} te^{-t/\tau_m}.$$

(5.1)



Поиск управления будем осуществлять в рамках задачи дифференциальной игры с квадратичным функционалом качества в соответствии с приведенной теорией в разделе 3 и 4, где объект управления (глюкоза), подвергается воздействию неконтролируемых возмущений (неправильное питание, образ жизни и др.).

Для того, чтоб человек не чувствовал головокружения и других симптомов гипогликемии, уровень глюкозы в крови не должен опускаться ниже 70 мг / дл.

На голодный желудок уровень глюкозы в крови должен находиться от 70 до 100 мг / дл.

После приема пищи уровень глюкозы в крови не должен превышать 180 мг / дл.

А через 2 часа после приема пищи быть ниже отметки 140 мг / дл. (Richard I. G. Holt, 2021)

Основную часть времени уровень глюкозы должен находиться: от 80 до 130 мг / дл.

Синтез управляющих воздействий при возмущениях, действующих на объект исследования, больного сахарным диабетом, будем строить используя теорию гарантирующего управления, а также применим алгебраический метод синтеза.

Метод расширенной линеаризации

Будем применять метод «расширенной линеаризации» к исходной нелинейной математической модели динамики системы “глюкозы – инсулин” (5.1), и получим эквивалентное линейное представление, с параметрами, зависящими от состояния :

$$\begin{matrix}
 dI_{SC}(t)/dt \\
 dI_p(t)/dt \\
 dI_{EFF}(t)/dt \\
 dG(t)/dt \\
 dG_{ISF}(t)/dt
 \end{matrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{t_2} & -\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p_2 S_I & -p_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -G & -GEZI & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1/t_{SEV} & -1/t_{SEV}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 I_{SC}(t) \\
 I_p(t) \\
 I_{EFF}(t) \\
 G(t) \\
 G_{ISF}(t)
 \end{pmatrix}
 +
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1/V_g \\
 0
 \end{pmatrix}
 u(t)
 +
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1/V_g \\
 0
 \end{pmatrix}
 w(t)$$

Таблица 2. Параметры пациента для математического моделирования

t_1 (мин)	t_2 (мин)	V_G (дл)	p_2 (мин)	EGP (мг / мин)	$GFZI$ (мин ⁻¹)	S_I (мл / мкЕ)	t_{SEN} (мин)
41	10	261	0.016	0.6	0.00438	0.0000964	15

$$R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$P(x) = \begin{pmatrix} 10/V_i^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9/V_g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi(x) = g_1(x)R^{-1}g_1^T(x) - g_2(x)P^{-1}g_2^T(x),$$

Q – единичная матрица,

P – единичная матрица.

Повышенная начальная концентрация глюкозы.

Рассмотрим поведение концентрации глюкозы без управляющего воздействия и возмущений, с первоначально повышенным начальным значением концентрации глюкозы $G_0 = 200 (mg / dl)$ и с управляющим воздействием и возмущением :

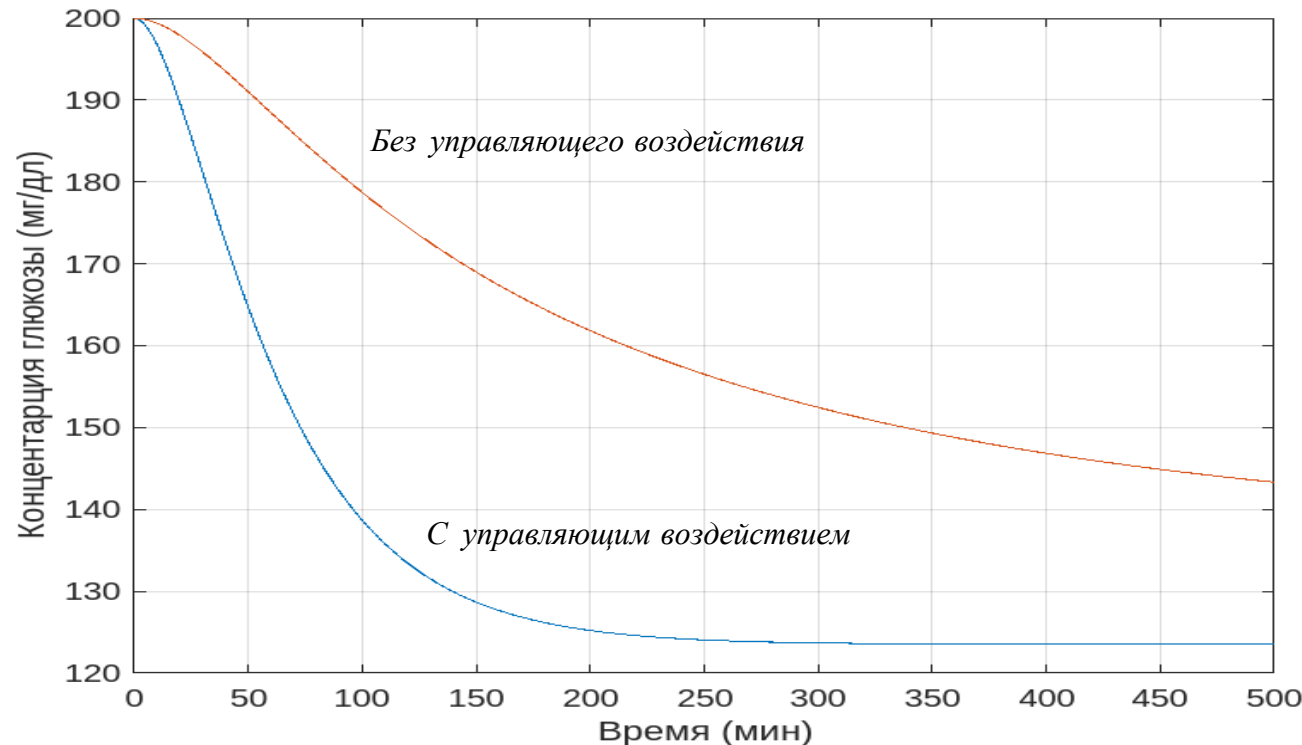


Рисунок 5.2. Концентрация глюкозы пациента, больного сахарным диабетом, при управлении с возмущениями, и без управления при изначально повышенном уровне глюкозы.

Пониженная начальная концентрация глюкозы

Рассмотрим поведение концентрации глюкозы без управляющего воздействия и возмущений, с первоначально пониженным начальным значением концентрации глюкозы $C_0 = 60$ (mg / dl) и с управляющим воздействием и возмущением :

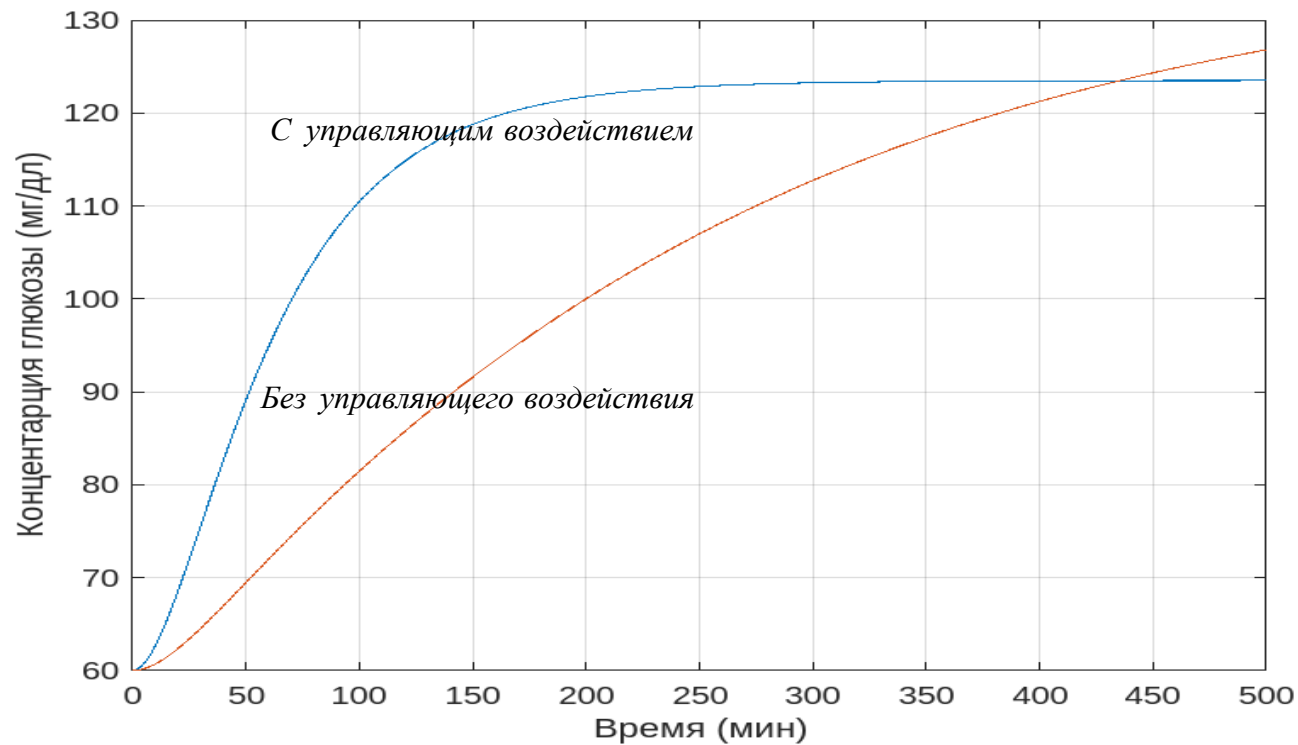


Рисунок 5.3. Концентрация глюкозы пациента, больного сахарным диабетом, при управлении с возмущениями, и без управления при изначально пониженном уровне глюкозы

Употребление пищи.

Рассмотрим поведение концентрации глюкозы без управляющего воздействия и возмущений, с начальным значением концентрации глюкозы $C_0 = 80$ (mg / dl) при употреблении пищи.

Здесь, на 20 – ой минуте было употреблено 20 грамм углеводов. Функция в уравнении глюкозы, отвечающая за употребления пищи была взята из модели Кандериана :

$$R(t) = \frac{C_H(t)}{v_g \tau_m^2} te^{-t/\tau_m}$$

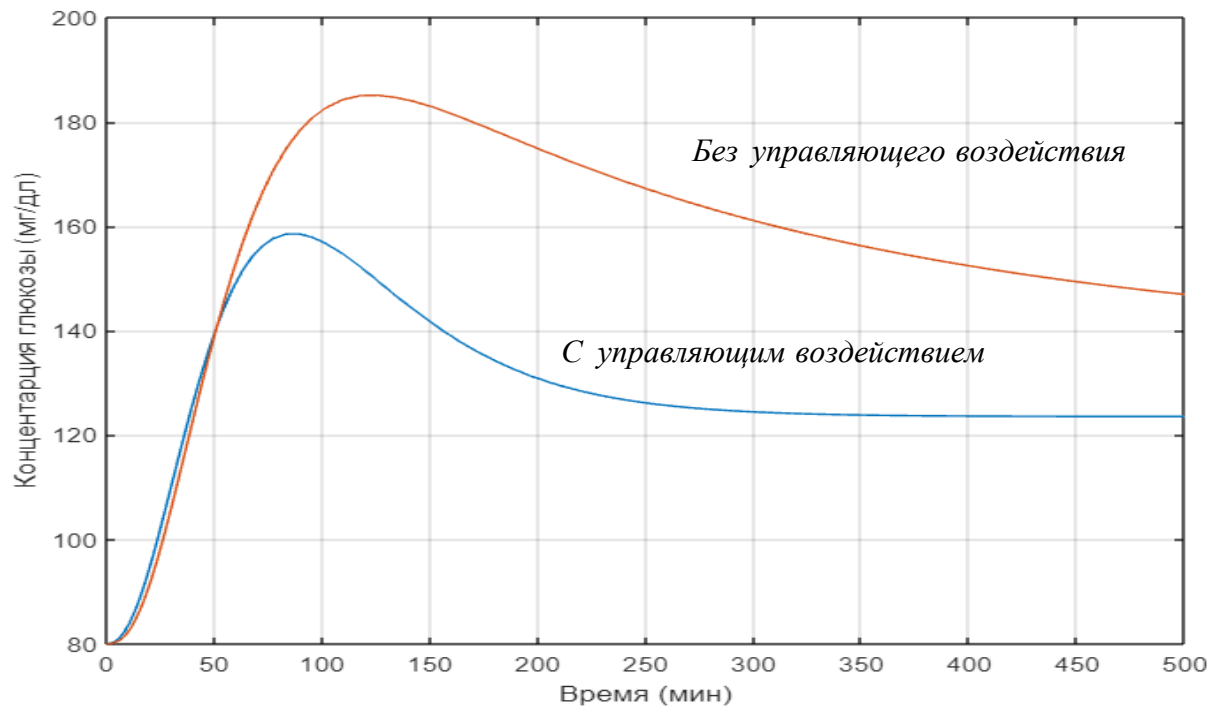


Рисунок 5.4. Концентрация глюкозы пациента, больного сахарным диабетом, при управлении с возмущениями, и без управления при употреблении пищи на 20 минуте наблюдения

Алгебраический метод

Произведем синтез управления с помощью алгебраического метода, описанного в 4 разделе.

Матрицы $\Pi(x)$ и $K(x)$:

$$\Pi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} V_g^2 / 9 & 0 \\ 0 & V_i^2 / 10 \end{pmatrix}, \quad K(x) = \begin{pmatrix} 3 / V_g & 0 \\ 0 & \sqrt{10} / V_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dG(t) / dt \\ dI_{sc}(t) / dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{3 / V_g\} \varepsilon_1(t) \\ \{\sqrt{10} / V_i\} \varepsilon_2(t) \end{pmatrix} \otimes \left[\frac{1}{5} \{ f^T(x) \Pi^{-1}(x) f(x) + \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) \} \right]^{1/2}$$

Повышенная начальная концентрация глюкозы

Рассмотрим поведение концентрации глюкозы без управляющего воздействия и возмущений, с первоначально повышенным начальным значением концентрации глюкозы

$G_0 = 200$ (mg / dl) и с управляющим воздействием и возмущением :

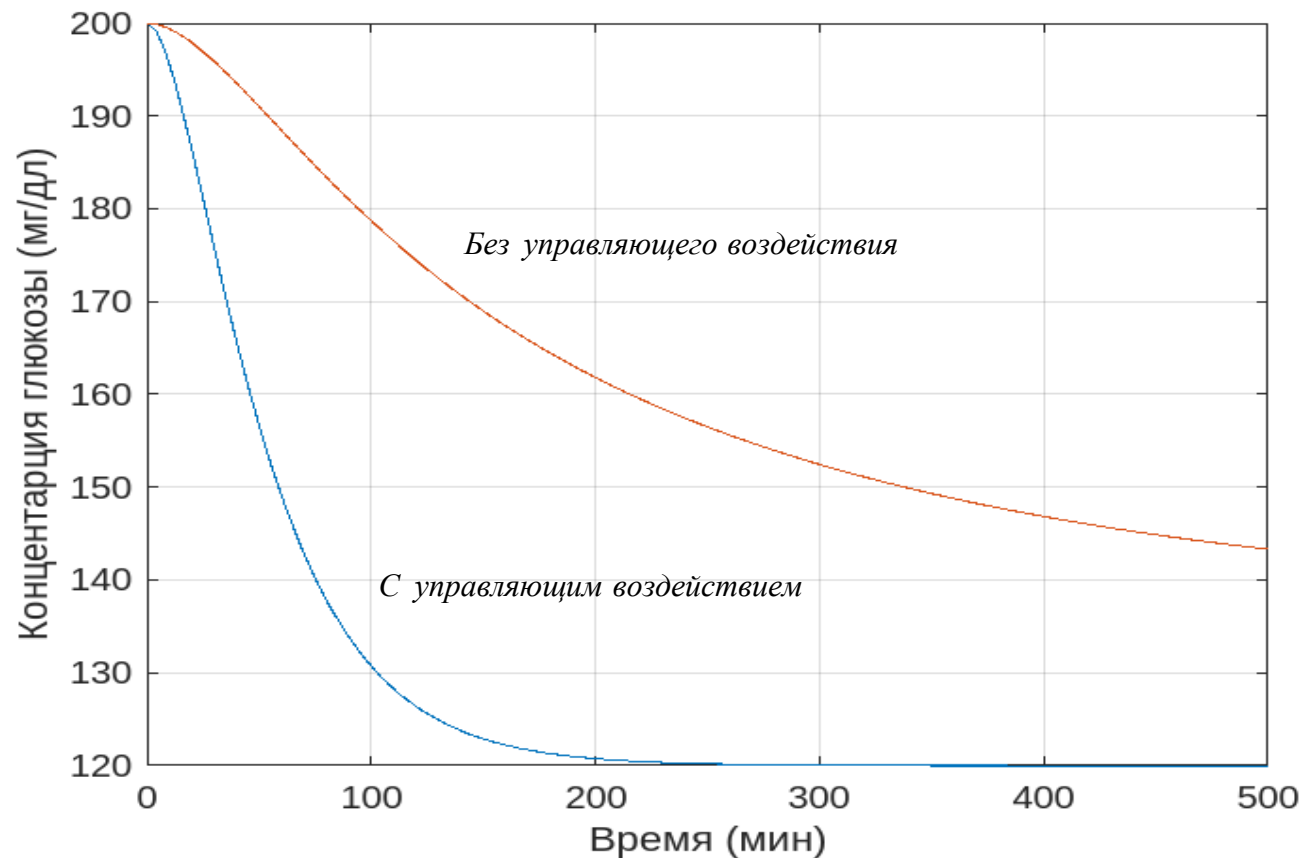


Рисунок 5.5. Концентрация глюкозы пациента, больного сахарным диабетом, при управлении с возмущениями, и без управления при изначально повышенном уровне глюкозы.

Пониженная начальная концентрация глюкозы

Рассмотрим поведение концентрации глюкозы без управляющего воздействия и возмущений, с первоначально пониженным начальным значением концентрации глюкозы $C_0 = 60$ (mg / dl) и с управляющим воздействием и возмущением:

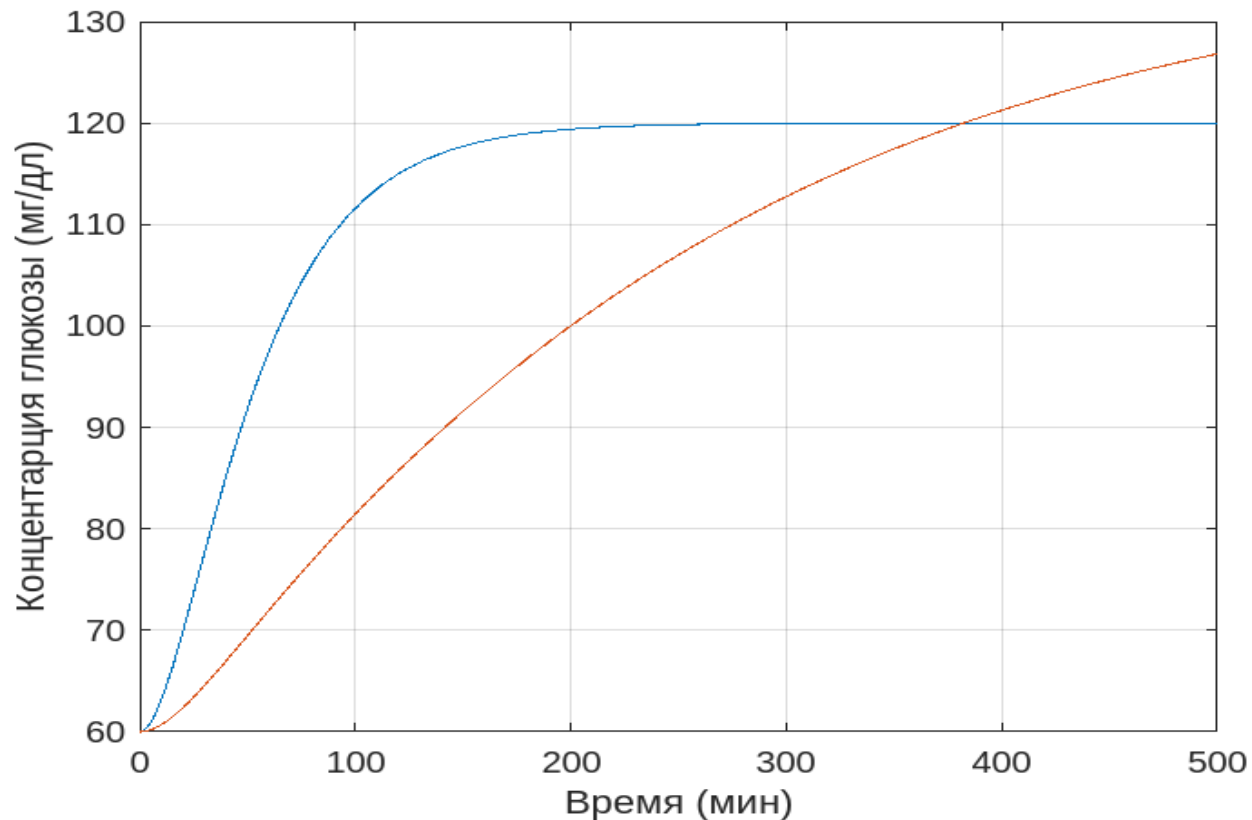


Рисунок 5.6. Концентрация глюкозы пациента, больного сахарным диабетом, при управлении с возмущениями, и без управления при изначально пониженном уровне глюкозы

Употребление пищи.

Рассмотрим поведение концентрации глюкозы без управляющего воздействия и возмущений, с начальным значением концентрации глюкозы $C_0 = 80$ (mg / dl) при употреблении пищи. Здесь, на 20 – ой минуте было употреблено 20 грамм углеводов. Функция в уравнении глюкозы, отвечающая за употребления пищи была взята из модели Кандериана :

$$R(t) = \frac{C_H(t)}{v_e \tau_m^2} t e^{-t/\tau_m}$$

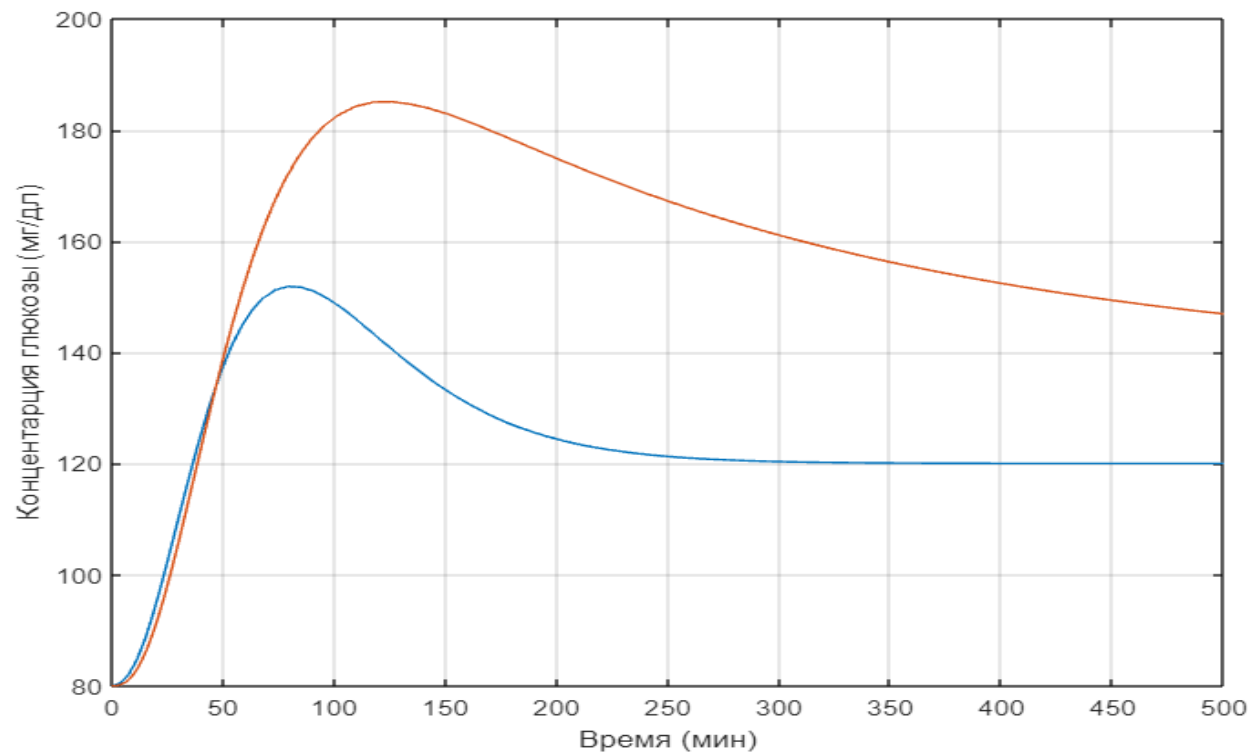
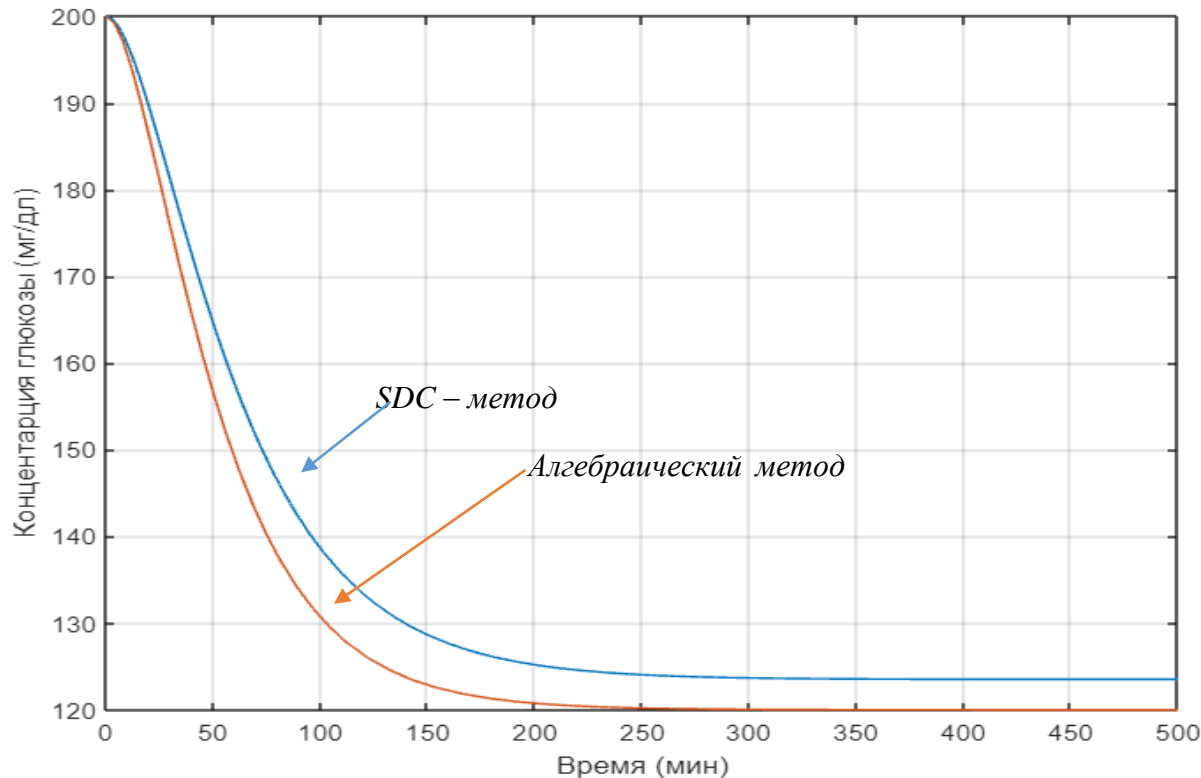


Рисунок 5.7. Концентрация глюкозы пациента, больного сахарным диабетом, при управлении с возмущениями, и без управления при употреблении пищи на 20 минуте наблюдения

Сравнение алгоритмов управления

Рассмотрим, как алгоритм из раздела 3 (SDC – линеаризация и гарантирующее управление) и алгоритм из раздела 4 (алгебраический метод) справляются с одной и той же ситуацией изначально повышенного уровня глюкозы $C_0 = 200$ (mg / dl)200.



Управление, синтезированное с помощью алгебраического метода, быстрее выводит уровень глюкозы на необходимое значение. При этом, при изначально пониженном уровне глюкозы и при употреблении пищи, алгебраический метод также справляется лучше.