**АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ ОТРЕЗКОВ НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПЕНЫ**

***О.Д. Клименкова***

***НИУ ВШЭ,***

***Департамент прикладной математики
МИЭМ НИУ ВШЭ,***

**Аннотация**

С помощью генерации отрезков на плоскости численно моделируется двумерная пена. Двумерную пену можно представить себе как множество отрезков одинаковой длины, хаотично разбросанных на плоскости. У такой системы отрезков на плоскости есть несколько особенных свойств, аналитически выведенных в работах [1][2][3]. В настоящей работе представлен и проверен алгоритм для генерации двумерной пены.

**Введение**

Как писал в своей основополагающей статье Гудсмит [1], изначально задачу о пересечении линий на плоскости, перед ним поставил Нильс Бор, когда интересовался вопросом: какова вероятность того, что несколько треков в камере Вильсона пересекутся в одной точке. В дальнейшем изучение свойств пересекающихся линий не было напрямую связано с экспериментами в камере Вильсона, и многие работы были написаны как продолжение изучения свойств такой системы [2][3]. В своей работе мы будет моделировать не линии на плоскости, а отрезки на ограниченной квадратом площади, и проверим, как посчитанные аналитически для прямой на плоскости свойства, будут выглядеть в нашем случае. Данный этап работ является подготовительным для дальнейшего изучения свойств двумерной пены. В разделе «Алгоритм» будут описаны особенности моделирования системы и проведено сравнение с аналитическими результатами.

**Алгоритм**

В работе [2] автор аналитически выводит формулы для расчета среднего периметра и средней площади полигонов (многоугольников) полученных в результате пересечений линий друг с другом. Средний периметр полигона $E\left(perimetr\right)= \frac{2π}{τ}$, а средняя площадь $E\left(area\right)= \frac{π}{τ^{2}}$, где τ – плотность. Эти свойства мы проверим на нашей модели.

Рассмотрим алгоритм генерации отрезков на плоскости, ограниченной квадратом:
1. Задаем параметры: размер стороны квадрата - бокса L. Размер отрезка единица. Задаем суммарную длину отрезков в боксе LenInbox.

2. "Разбрасываем" отрезки на плоскости: для этого случайно генерируем координаты точки начала (x,y) внутри бокса, и угол φ ϵ [0,2π]. Далее от этой точки под выбранным углом отмеряем длину l. Отрезок может выходить за пределы бокса, но во всех расчетах участвует только длина, попавшая в бокс. Повторяем процесс разбрасывания, пока суммарная длина отрезков внутри бокса не станет приблизительно равна LenInbox.

3. Находим пересечения всех отрезков друг с другом. Учитываем только пересечения, оказавшиеся внутри бокса.

4. Используя, структуру данных Dcel [4] (doubly-connected edge list - двусвязный список ребер), находим площади и периметры получившихся в результате пересечений полигонов.

Мы проверим, что зависимость среднего периметра от плотности обратно пропорциональна LenInBox, а зависимость средней площади обратна пропорциональна квадрату LenInBox.

**Результаты**

Сравнивать результаты из приведенных статей и результаты полученные при моделировании можно только когда отрезки выходят за размеры бокса. Поскольку, когда иголки маленькие по сравнению с размером бокса, то они не похожи на "прямые на плоскости", как рассматривают в статьях. Когда размер у отрезков маленький, то и полигоны получаются большими, и их мало. Чтобы проверить правильность моделирования, мы рассмотрим длину иголки равную 200 при размере бокса 200, и увеличим плотность иголок в боксе (за счет параметра LenInBox = 5000, 8000, 10000, 12000, 15000). Только эти результаты можно сравнивать с аналитическими расчетами из статьи [2].

На Рис.1 видно, что для периметра зависимость подтверждает данные из статьи. Для площади зависимость действительно получается обратной квадрату LenInBox как мы видим на Рис.2.



*Рис. 1. Зависимость среднего периметра полигонов от суммарной длины отрезков в боксе*



*Рис. 2. Зависимость средней площади полигонов от квадрата суммарной длины отрезков в боксе*

**Заключение**

На основе проведенного исследования можно утверждать, что для дальнейшего изучения свойств двумерной пены мы сможем пользоваться предложенным алгоритмом генерации отрезков. Известные аналитические результаты дают возможность ввести понятие плотности.

Работа выполнена в рамках проекта 18-05-0024 Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2018-2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100». Постановка задачи и научное руководство – Щур Л.Н.

**Список литературы**

[1] R. E. Miles, Random polygons determined by random lines in a plane, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. Т. 52.– No. 4. – С. 901. (1964)

[2] S. Goudsmit Random distribution of lines in a plane Reviews of Modern Physics. – Т. 17. – №. 2-3. – С. 321 (1945)

[3] R. E. Miles The various aggregates of random polygons determined by random lines in a plane //Advances in Mathematics. – Т. 10. – №. 2. – С. 256-290 (1973)

[4] D. E. Muller, F. P. Preparata, Finding the intersection of two convex polyhedral, Theoretical Computer Science. – Т. 7. – №. 2. – С. 217-236. (1978)