СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ УЧЁТА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В МЕТОДЕ РЕШЁТОЧНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА НА ПРИМЕРЕ ДВУМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

К.О. Загвоздина
НИУ ВШЭ,
департамент прикладной математики
МИЭМ НИУ ВШЭ

Аннотация

Данное исследование посвящено задаче определения влияния двух способов учёта граничных условий (ГУ) в решении двумерной задачи Куэтта течения жидкости методо решёточного уравнения Больцмана. Анализ проведён на основе L_2-ошибок численных решений.

Введение

Целью данной работы является исследование метода решёточного уравнения Больцмана на простейшей задаче шидродинамики (течение Куэтта). Основной задачей данной работы был расчёт скоростей жидкости в тестовой задаче при задействовании различных методов учёта граничных условий (ГУ). В первой и второй частях работы вводятся метод решёточного уравнения Больцмана и 2 разных подхода к учёту ГУ. Во третьей части работы сравниваются результаты численных экспериментов при использовании разных равновесных функций распределения и пространственных сеток.

Общий метод решёточного уравнения Больцмана

Полагая, что $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},t)$ есть функция распределения частиц, ξ – их скорость, $\boldsymbol{F}$ – внешняя сила, а $\Omega(f)$ – интеграл столкновений, можно записать уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi_\alpha\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}+\frac{F_\alpha}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}=\Omega(f).$$

Дискретные скорости $\boldsymbol{c}_i$ вводятся совместно с весами w_i, и образуют набор скоростей, обозначаемый DdQq, где d – размерность физического пространства, q – количество дискретных скоростей. В данном исследовании выбран набор D2Q9.

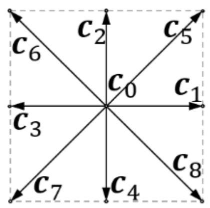

Рис. 1. Дискретные скорости в наборе D2Q9

Дискретизируя уравнение Больцмана, получаем решёточное уравнение Больцмана:

$$f_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\Delta t,t+\Delta t)=f_i(\boldsymbol{x},t)+\Omega_i(\boldsymbol{x},t).$$

Таким образом, частицы $f_i(\boldsymbol{x},t)$ перемещаются в соседний узел $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\Delta t$. Оператор Ω_i моделирует столкновение частиц с помощью их перераспределения по f_i. Дискретный оператор BGK может быть записан следующим образом:

$$\Omega_i(f)=-\frac{f_i-f_i^{eq}}{\tau}\Delta t,$$

где τ – время релаксации [1]. Для простоты обычно считают, что $\Delta x=1$ и $\Delta t=1$.

Макроскопические плотность и скорость течения жидкости определяются как моменты дискретной функции распределения:

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=\sum_i f_i(\boldsymbol{x},t),\qquad \rho(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\sum_i \boldsymbol{c}_i f_i(\boldsymbol{x},t).$$

Учёт граничных условий

Задача течения Куэтта [4] является задачей Дирихле, т.е. задана скорость границ. В данной работе использованы три типа граничных условий.

Периодические граничные условия внедряются в схему решения на этапе распространения:

$$f_i^*(\boldsymbol{x},t)=f_i^*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{L},t).$$

Следующие два метода принципиально отличаются друг от друга вводимыми пространственными сетками.

Link-wise метод отскока учёта граничных условий в задаче Дирихле с жёсткой стенкой. В данном случае сетка вводится таким образом, чтобы граница раздела твёрдой стенки и жидкости проходила между узлами сетки. Принцип этого метода заключается в том, что частицы, попавшие на границы, должны быть отражены в своё прежнее положение.

Wet-node метод учёта граничных условий в задаче Дирихле с жёсткой стенкой. Здесь сетка вводится таким образом, что граничные узлы лежат как можно ближе к физической границе раздела. Этот метод заключается в (а) нахождении плотности жидкости на границе (из условия непроницаемости), (б) нахождении распределения на границе (неравновесный метод отскока [3]).

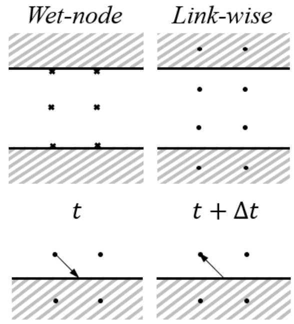

Рис. 2. Графическая интерпретация рассматриваемых способов учёта ГУ

Численный эксперимент

Тестирование методов проводилось на задаче течения Куэтта [4] – в плоском сосуде высотой d находится несжимаемая жидкость, нижняя граница сосуда неподвижна, верхняя граница движется с постоянной скоростью u_0. Профиль скорости в данной модели записывается следующим образом [1]:

$$\tilde{u}_x(y)=\frac{u_0}{d}y,\ \ \tilde{u}_y\equiv 0.$$

Численные эксперименты показали, что в рамках данной задачи метод link-wise учёта граничных условий стабилен только при $\tau\geq 0.5$. [2] Так же была доказана консервативость схем (выполнение законов сохранения).

Рассматривались 2 варианта ввода равновесной функции распределения [1]:

$$f_i^{eq}(\boldsymbol{x},t)=w_i\rho\left(1+\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}_i}{c_s^2}+\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}_i)^2}{2c_s^4}-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{2c_s^2}\right)\ \text{или}$$

$$f_i^{eq}(\boldsymbol{x},t)=w_i\rho\left(1+\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}_i}{c_s^2}\right).$$

В результате сравнения их применения в рамках одного метода учёта ГУ выяснилось, что добавление новых членов в разложении аналитической функции распределения Максвелла-Больцмана по полиномам Эрмита не улучшает точность общего метода. При этом метод wet-node учёта ГУ позволяет решить задачу течения Куэтта до установления за чуть меньшее количество итераций.

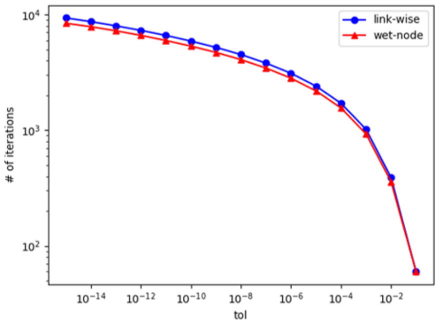

Рис. 3. Количество итераций до установления с заданной точностью tol для подходов link-wise и wet-node учёта ГУ при $\tau = 0.9$ *и* $u_0 = 0.1$

Среднеквадратичное отклонение было расчитано с использованием аналитического решения задачи $\tilde{\boldsymbol{u}}$:

$$err = \frac{1}{n_x}\sum_{i=1}^{n_x}\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_y}\left[\tilde{u}_x(y_j) - u_x(x_i, y_j)\right]^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n_y}\tilde{u}_x^2(y_j)}}.$$

Методы wet-node и link-wise учёта ГУ дают одинаковые решения данной задачи. При этом авторы [1] говорят, что метод wet-node сложен в реализации для решения 3D задач.

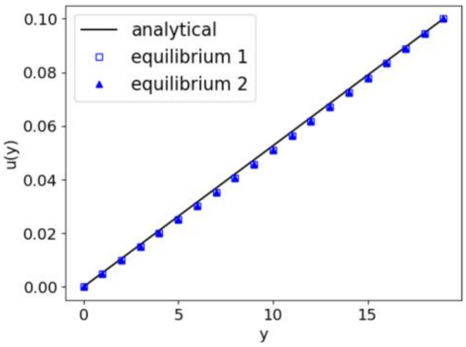

Рис. 4. Численное и аналитическое решения модельной задачи для link-wise метода учёта ГУ и разных равновесных фукций распределения при при $\tau = 0.9$, $N_t = 1000$ *и* $u_0 = 0.1$, *ошибка* $err = 0.02$

Заключение

В результате исследования были расчитаны точности решений задачи течения Куэтта при различных модификациях метода решёточного уравнения Больцмана. Зависимости точности от количества членов в разложении равновесной функции распределения частиц по функция Эрмита не наблюдается. Wet-node и link-wise методы учёта ГУ дают одинаковые решения, при этом wet-node метод теряет в лёгкости программной реализации (метод завязан на геометрии области расчёта и её границ, сложно применять в 3D). Работа выполнена в рамках проекта 18-05-0024 Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2018 — 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100».

Список литературы:

1. T. Kruger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, and E. M. Viggen, The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice (Springer International Publishing, 2017).
2. M. Bouzidi, M. Firdaouss, P. Lallemand, Phys. Fluids 13, 3452 (2001).
3. Q. Zou, X. He, Phys. Fluids 9, 1591 (1997).
4. G. Falkovich. Fluid Mechanics - A Short Course for Physicists // Cambridge University Press, 2011.