Сравнение различных способов учёта граничных условий в методе решеточного уравнения Больцмана на примере двумерного течения Куэтта

Загвоздина К.О. научный руководитель Буровский Е.А.

Введение

Данное исследование посвящено задаче определения влияния двух способов учёта граничных условий (ГУ) в решении двумерной задачи Куэтта течения жидкости методо решёточного уравнения Больцмана. Анализ проведён на основе L_2-ошибок численных решений.

Цель работы – исследовать метод решёточного уравнения Больцмана на простейшей задаче гидродинамики (течение Куэтта).

Основная задача – расчёт скоростей жидкости в тестовой задаче при задействовании различных методов учёта ГУ.

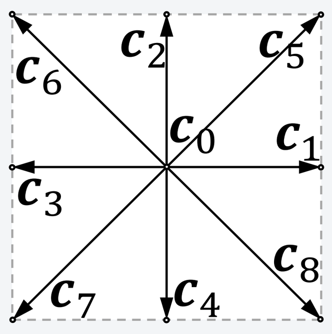
Метод

Общий метод решёточного уравнения Больцмана

Полагая, что $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},t)$ есть функция распределения частиц, а ξ – её скорость, можно записать уравнение Больцмана:

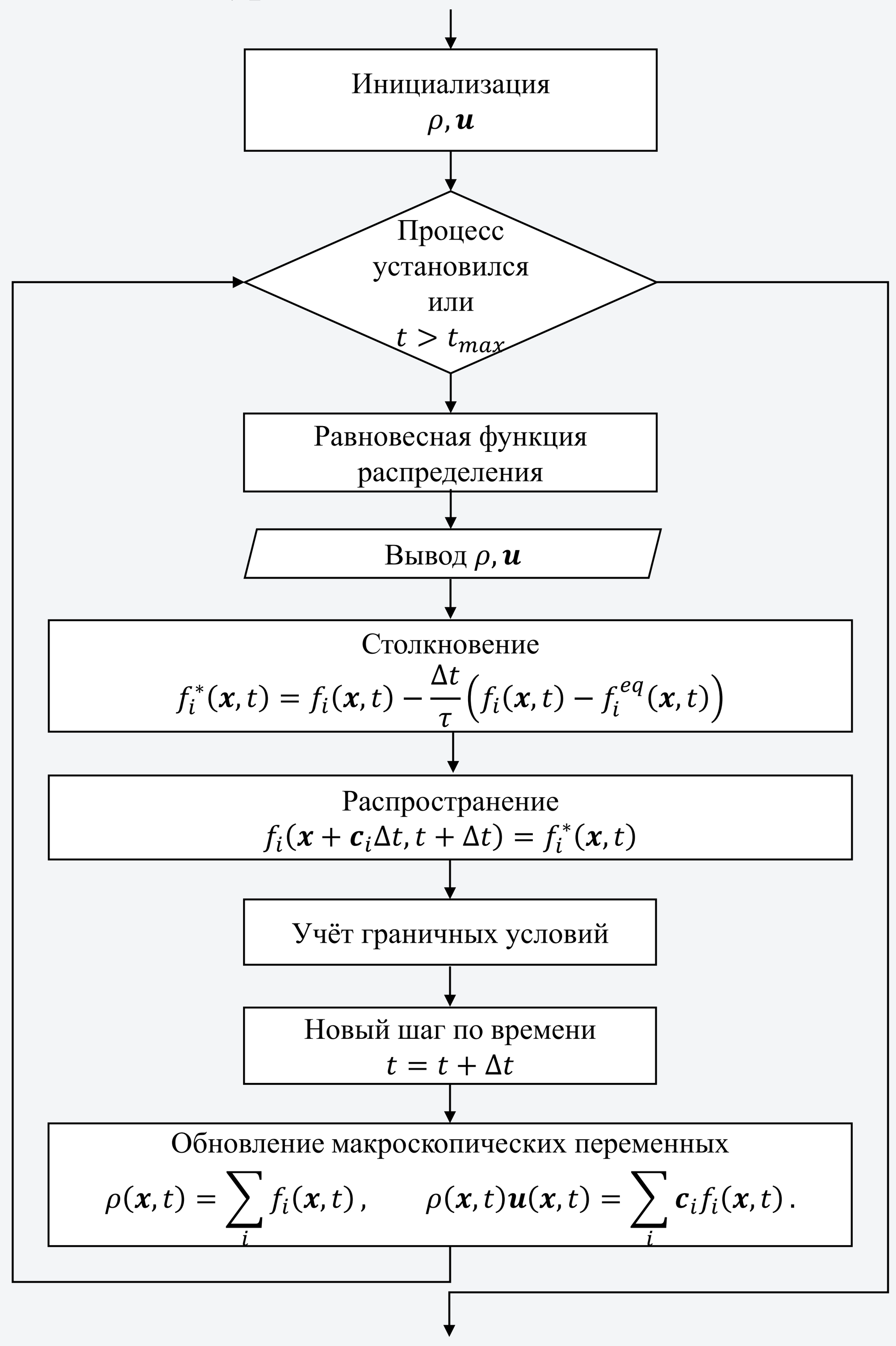
$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi_\alpha\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}+\frac{F_\alpha}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}=-\frac{1}{\tau}(f-f^{eq}),$$

где τ – время релаксации [1].



Дискретные скорости $\boldsymbol{c}_i$ вводятся совместно с весами w_i, и образуют набор скоростей, обозначаемый DdQq, где d – размерность физического пространства, q – количество дискретных скоростей. В данном исследовании выбран набор D2Q9.

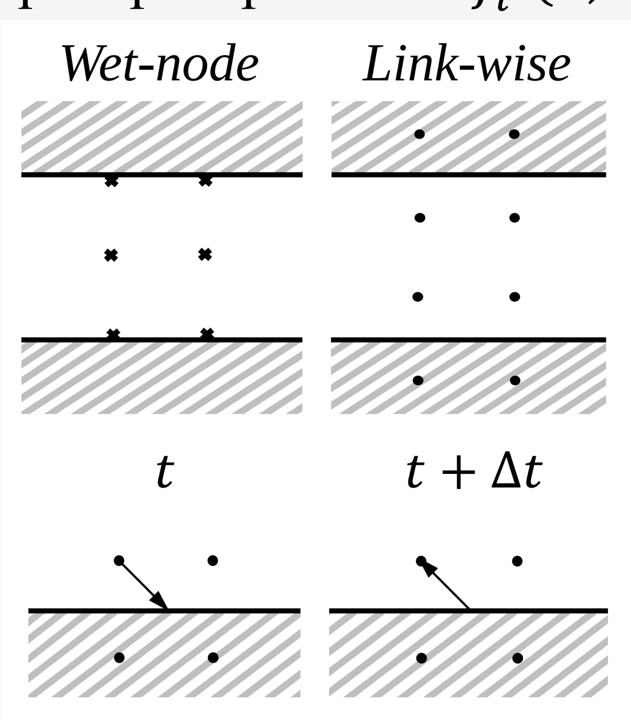
Блок-схема метода решёточного уравнения Больцмана



Учёт граничных условий

Задача течения Куэтта является задачей Дирихле, т.е. задана скорость границ. В данной работе использованы три типа граничных условий.

Периодические граничные условия внедряются в схему решения на этапе распространения: $f_i^*(\boldsymbol{x},t)=f_i^*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{L},t)$.



Link-wise метод отскока учёта граничных условий в задаче Дирихле с жёсткой стенкой. Граница раздела твёрдой стенки и жидкости проходит между узлами сетки. Принцип этого метода заключается в том, что частицы, попавшие на границы, должны быть отражены в своё прежнее положение [2].

Wet-node метод учёта граничных условий в задаче Дирихле с жёсткой стенкой. Граничные узлы лежат как можно более близко к физической границе раздела. Этот метод заключается в (а) нахождении плотности жидкости на границе (из условия непроницаемости), (б) нахождении распределения на границе (неравновесный метод отскока [3]).

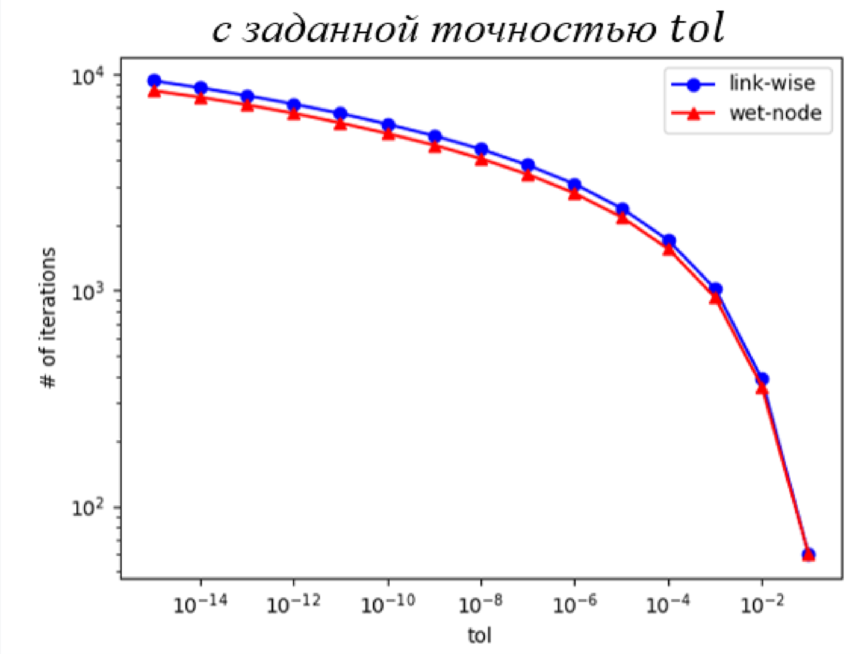
Численный эксперимент

В ходе численного эксперимента было доказано, что в рамках данной задачи метод link-wise учёта граничных условий стабилен только при $\tau = 0.5$ [2]. Так же была доказана консервативность схем (выполнение законов сохранения).

Рассматривались 2 варианта ввода равновесной функции распределения [1]:

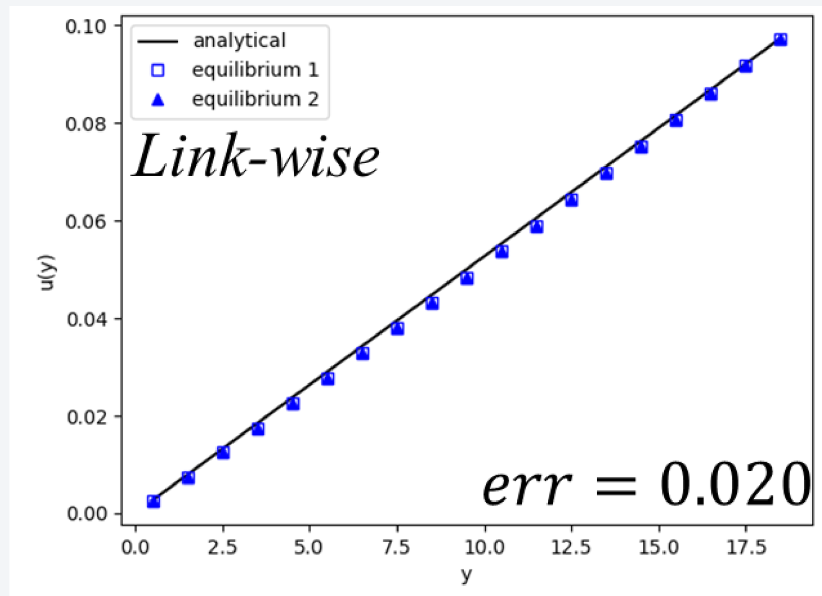
$$f_i^{eq}(\boldsymbol{x},t)=w_i\rho\left(1+\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}_i}{c_s^2}+\cancel{\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}_i)^2}{2c_s^4}-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{2c_s^2}}\right).$$

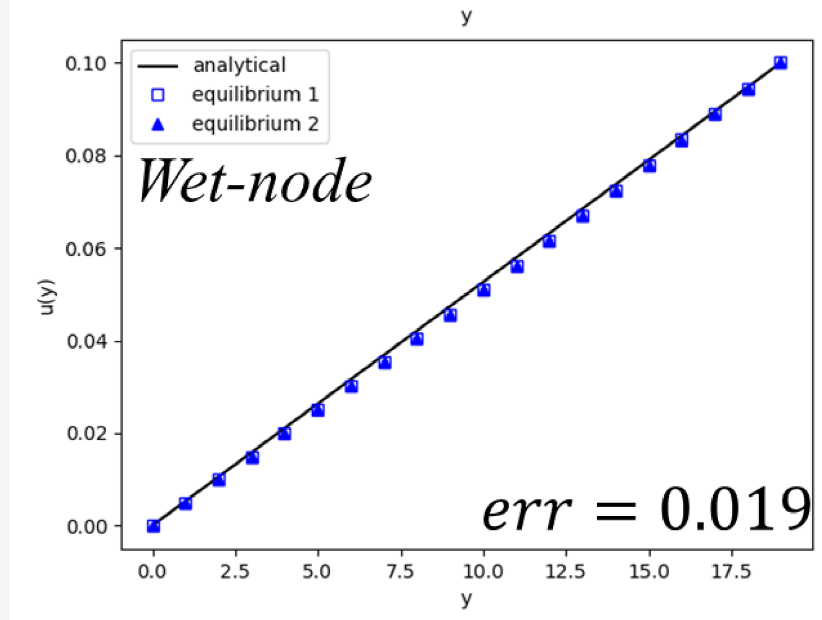
Количество итераций до установления с заданной точностью tol



При результате сравнения их применения в рамках одного метода учёта ГУ выяснилось, что добавление новых членов в разложении не улучшает точность общего метода. При этом метод wet-node учёта ГУ позволять решить задачу течения Куэтта с чуть более хорошей точностью.

При проведении расчётов до установления также выяснилось, что метод link-wise уступает методу wet-node учёта ГУ.





Выводы

В результате исследования были расчитаны точности решений задачи течения Куэтта при различных модификациях метода решёточного уравнения Больцмана. Зависимости точности от количества членов в разложении равновесной функции распределения частиц по функция Эрмита не наблюдается. Wet-node метод учёта ГУ даёт лучшее решение, при этом теряя в лёгкости программной реализации (метод завязан на геометрии области расчёта и её границ, сложно применять в 3D).

Список литературы

1. T. Kruger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, and E. M. Viggen, The Lattice Boltzmann Method: Principles and Practice (Springer International Publishing, 2017).
2. M. Bouzidi, M. Firdaouss, P. Lallemand, Phys. Fluids 13, 3452 (2001).
3. Q. Zou, X. He, Phys. Fluids 9, 1591 (1997).

МИЭМ НИУ ВШЭ г. Таруса, 2019

Научный фонд НИУ ВШЭ грант 18-05-0024 и программа “5-100”