**Введение в теорию физических измерений**

 Отличительной особенностью физической науки является то, что изучаемые ею свойства и характеристики объектов и процессов – сравнительно просто квантифицируются, то есть допускают количественное выражение, меру в форме тех или иных физических величин. Нахождение размера (значения) какой-либо физической величины, называемое ее измерением, осуществляется путем сравнения с определенной мерой, принятой за единицу этой величины.

 В международной системе единиц СИ в качестве основных выбраны: килограмм, метр, секунда, кельвин, ампер, кандела. Единицы других величин являются производными и устанавливаются на основании их взаимосвязей с величинами, единицы которых выбраны в качестве основных.

 Благодаря широкому распространению измерений и высокой степени математизации физика является наукой точной и строгой. Эти ее достоинства предполагают обязательную оценку точности результатов производимых измерений.

 Как правило, эксперимент, измерение, осуществляемые с помощью технических средств и математических операций и вычислений, дают лишь приближенное к истинному значение физической величины, называемое результатом измерения. Мерой этого приближения, то есть мерой оценки точности результата измерения, служит погрешность измерения (устаревшее название – ошибка измерения).

 Погрешность измерения имеет две формы выражения, называемые абсолютной и относительной погрешностями.

 Абсолютная погрешность некоторой величины Х обозначается $∆Х$. Она равна разности номинального (полученного при измерении значения Х) и ее истинного значения $Х\_{ист}$: $∆Х=Х- Х\_{ист}$.

 Относительная погрешность величины Х обозначается $ε$. Она равна отношению абсолютной погрешности $∆Х$ к истинному значению $Х\_{ист}$ и выражается обычно в процентах: $ε=\frac{∆Х}{Х\_{ист}}∙100\%$.

 Абсолютная погрешность $∆Х$ указывает тот интервал вокруг измеренного значения ($Х\pm ∆Х)$, в котором может находиться истинное значение измеряемой величины. Относительная же погрешность, будучи безразмерной, характеризует «удельный вес» этого интервала в номинальном значении величины.

 По источнику своего происхождения погрешности подразделяются на систематические, случайные и грубые (промахи).

 Под систематической понимают погрешность устойчиво повторяющуюся (или закономерно изменяющуюся) при повторных отсчетах измеряемой величины, производимых в одних и тех же условиях. В систематической погрешности различают приборную (инструментальную) и методическую составляющие, которые являются следствием несовершенства, соответственно, используемых приборов и методики измерения. Эти погрешности могут выявляться и понижаться путем использования более точных приборов и разных методик измерения.

 В грубых одно шкальных приборах типа обычной линейки за приборную погрешность, обычно, принимают половину, а иногда и полную цену С деления1 шкалы приборов.

 В отличие от систематической случайная погрешность изменяется хаотически в серии из n повторяющихся в одинаковых условиях отсчетов измеряемой величины. Она является следствием воздействия на измеряемую величину большого числа обычно мелких и независимых друг от друга факторов, помех. Их действие приводит к хаотическому разбросу результатов отдельных отсчетов $Х\_{i}$ вокруг среднего арифметического значения $<Х>$ = $\frac{\sum\_{i}^{}Х\_{i}}{n}$, определяемого самой измеряемой величиной. Это среднее арифметическое значение $<Х> и является обычно наилучшим $приближением к истинному значению измеряемой величины Х.

 Вклад случайных факторов и помех в погрешность результата измерения

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1Под ценой деления С шкалы прибора понимают количество (размер, значение) измеряемой величины, приходящееся на одно деление шкалы. Для равномерной шкалы она равна отношению максимального (предельного) значения $Х\_{пр}$ шкалы к числу N ее делений: $С= \frac{Х\_{пр}}{N}$.

можно оценить, произведя статистическую обработку результатов серии n отсчетов, называемой выборкой. Обычно такая обработка основывается на предположении о том, что результаты $Х\_{i}$ отдельных отсчетов (и их отклонений $∆Х\_{i}= Х\_{i}- <Х>$ от среднего арифметического $<Х>$) образуют случайную совокупность, подчиняющуюся нормальному или гауссовому закону распределения. При таком законе отклонения $∆Х\_{i}$ одинаковой величины и разного знака появляются одинаково часто, и с ростом величины частота их появления убывает.

 При увеличении объема выборки, то есть числа n отсчетов и их усреднении, отклонения $∆Х\_{i}= Х\_{i}- <Х>$ разного знака все более полно взаимно компенсируют друг друга. Соответственно, среднее арифметическое значение $<Х>$ измеряемой величины все ближе стремится к ее истинному значению $Х\_{ист}$, совпадая с ним в пределе при $n \rightarrow \infty $. В такой бесконечно большой совокупности отсчетов, называемой генеральной, результат $Х\_{i}$ отдельного измерения попадает в определенный интервал $\pm ∆X$ вокруг $<Х> = Х\_{ист}$ с определенной вероятностью2 Р. Например, для $∆X=σ= \sqrt{\frac{\sum\_{i=1}^{n}∆X\_{i}^{2}}{n-1}}$, называемого средним квадратическим (или среднеквадратическим) отклонением (СКО) результата отдельного измерения, результат $Х\_{i}$ попадает в интервал $<Х> \pm σ$ с вероятностью Р = 68%. Это значит, что 68% случаях из общего числа $n \rightarrow \infty ,$ результаты отсчета $Х\_{i}$ будут попадать в интервал $<Х> \pm σ$. Или, иначе, истинное значение $Х\_{ист}= <Х>$, с вероятность Р = 68% располагается в интервале $Х\_{i}\pm σ$.

 Увеличение вероятности Р, называемой доверительной (или коэффициентом надежности, коэффициентом доверия), приводит к расширению интервала $∆X$, в пределах $\pm ∆X$ которого вокруг $<Х>$ предположительно находится истинное значение $Х\_{ист}$ и который также называется *доверительным*. Так, для доверительной вероятности Р =95%, ширина доверительного интервала возрастает до $\pm 2σ$, а для Р = 99% - до $\pm 3σ$.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2Под вероятностью Р того или иного события понимают относительную предельную частоту его появления в генеральной совокупности однотипных событий: $\lim\_{n\to \infty }\frac{n^{ʹ}}{n}$, где $n^{ʹ}-$ число появлений выделенного события во всей совокупности n событий.

 Большей степенью приближения к истинному значению $Х\_{ист}$, в сравнении с результатом $Х\_{i}$ единичного отсчета, будет обладать среднее арифметическое значение $<Х>$ некоторой конечной совокупности $n$ отсчетов. Статистический анализ показывает, что доверительный интервал $\pm ∆X$ сокращается при этом $\sqrt{n}$ раз, то есть $∆X=\frac{σ}{\sqrt{n}}= \sqrt{\frac{\sum\_{i=1}^{n}∆X\_{i}^{2}}{n(n-1)}}=S\_{n}^{ʹ}$, где $S\_{n}^{ʹ}-$ так называемый *стандартный доверительный интервал*.

 На практике обычно ограничиваются, как правило, небольшими совокупностями отсчетов, называемых малыми выборками, с числом отсчетов $n=5 ÷20.$ При этом для оценки случайной погрешности приходится пользоваться приближенным к гауссовому (к $σ)$ значением СКО: $S\_{n}=\sqrt{\frac{\sum\_{i=1}^{n}∆X\_{i}^{2}}{(n-1)}}$. Это приводит к расширению доверительного интервала $∆X$, то есть к возрастанию абсолютной погрешности измерения. Для конечных выборок доверительный интервал выражается формулой: $∆Х=\frac{S\_{n}∙t\_{n,p}}{\sqrt{n}}=t\_{n,p}∙S\_{n}^{ʹ}$, где $t\_{n,p}-$коэффициент Стьюдента, являющийся табулированной величиной, зависящий от объема выборки (числа отсчетов$ n$) и доверительной вероятности Р.

 С ростом числа отсчетов $n$ коэффициент Стьюдента $t\_{n,p}$ уменьшается, а значит доверительный интервал $\pm ∆X$ сужается, так как возрастает точность измерений, то есть степень приближения $<Х>$ к $Х\_{ист}$ за счет более полной компенсации случайных погрешностей разного знака. При числе отсчетов $n<20$ «погрешность погрешности», обусловленная случайностью среднеквадратического отклонения $S\_{n}$ в выборке, составляет не менее 25%. Поэтому при записи погрешности (доверительного интервала) ее округляют, оставляя одну значащую3 цифру в старшем разряде, если на больше тройки, или две цифры, если цифра в старшем погрешности меньше чем 3. С такой же точностью округляют и сам результат измерения величины Х.

 Увеличение доверительной вероятности Р означает требование большей надежности, то есть большей частоты попадания результатов измерения в доверительный интервал $\pm ∆X$. Это приводит к необходимости его расширения, что отражается соответствующим возрастанием коэффициента

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

3Значащими называются все цифры числа, кроме нулей в его начале, которые служат только для установления разрядов остальных чисел.

Стьюдента $t\_{n,p}$ с ростом Р.

 Обычно доверительную вероятность Р выбирают 68% (или 95%); это означает, что истинное значение $Х\_{ист}$ с вероятностью 68% находится в интервале $<Х>\pm ∆X$. В более ответственных случаях вероятность Р выбирают равной 99% или еще выше.

**Расчет погрешности прямых измерений**

В простейшем случае измерений, называемых прямыми, при которых величина Х непосредственно отсчитывается по шкале приборов, оценка точности их результатов осуществляется следующим образом.

 Производится несколько отсчетов $Х\_{i}$ измеряемой величины Х и если результаты отдельных отсчетов не различаются в пределах погрешности прибора $δ$ (то есть доминирует приборная погрешность), можно ограничиться тремя-четырьмя отсчетами и результат записать в виде:

$Х=<Х>\pm δ; ε\_{х} = \frac{δ}{<Х>}100\%$.

Пример: при измерении штангенциркулем с погрешностью $δ=0,05 мм$ диаметра $D$ калиброванного цилиндра получены значения: $D\_{1}=19,80 мм;$ $D\_{2}=19,85 мм;$ $D\_{3}=19,80 мм;$ $D\_{4}=19,80 мм.$

 Вычисляем $<D> = \frac{\sum\_{}^{}D\_{i}}{4}=19,81 мм и ε\_{D}= \frac{δ}{<D>}100\%=0,25\%.$ Определяем $<∆D> = \frac{\sum\_{}^{}\left|∆D\_{i}\right|}{4}=$0,018 мм < $δ$.

 Записываем результат: $D$ = (19,81$\pm $0,05)мм; $ε\_{D}=0,25\%$.

 Если результаты $Х\_{i}$ отсчетов прямо измеряемой величины Х разнятся на величину, заметно превышающую погрешность прибора $δ$ (то есть доминирует случайная погрешность), число отсчетов $n$ следует увеличить до $10÷20$ (для понижения случайной погрешности) и произвести их статистическую обработку. Ее целью является определение доверительного интервала $∆X$, в пределах $\pm ∆X$ которого вокруг значения $<Х>$ с заданной доверительной вероятностью Р находится значение $Х\_{ист}$. При этом рекомендуется придерживаться следующего порядка.

1. Вычисляется среднее арифметическое значение измеряемой величины

 $<Х>$ = $\frac{\sum\_{i}^{n}X\_{i}}{n}$.

1. Рассчитываются отклонения отдельных отсчетов от среднего значения

 $∆Х\_{i}= X\_{i}-<X>$ и вычисляется среднеквадратичное отклонение результата отдельного измерения: $S\_{n}= \sqrt{\frac{\sum\_{i=1}^{n}∆X\_{i}^{2}}{n-1}}$.

1. Проведение наличие промахов, к которым относят такие отсчеты $X\_{i}$, отклонения $∆Х\_{i}$ которых превышают утроенное значение среднеквадратичного отклонения $S\_{n}$, то есть $∆Х\_{i}>3S\_{n}$. Выявленные промахи из обработки результатов исключаются, и производится повторный расчет по пунктам 1-2.
2. Рассчитывается доверительный интервал $∆Х=\frac{S\_{n}∙t\_{n,p}}{\sqrt{n}}$. Коэффициент Стьюдента $t\_{n,p}$ выбирают из таблицы Приложения для заданных значений $n и Р.$
3. Результат измерений округляют соразмерно его погрешности (доверительному интервалу) и записывают в стандартном виде:

 $X= <Х>\pm ∆X$, $ε\_{x}= \frac{∆X}{<Х>}100\%,$ P =

 Пример: при измерении диаметра грубо обработанной детали микрометром, погрешность которого $δ=0,01 мм$, получены следующие значения:

$D\_{1}=19,82 мм;$ $D\_{2}=19,87 мм;$ $D\_{3}=19,74 мм;$ $D\_{4}=19,80 мм$; $D\_{5}=19,77 мм;$ $D\_{6}=19,85 мм;$ $D\_{7}=19,81 мм;$ $D\_{8}=19,80 мм;$ $D\_{9}=19,73 мм;$ $D\_{10}=19,87 мм.$

 Вычисляем: 1) $<D> = \frac{\sum\_{i=1}^{n}D\_{i}}{10}$ = 19,806 мм, 2) СКО результата отдельного измерения: $S\_{n}= \sqrt{\frac{\sum\_{i=1}^{n}D\_{i}}{n-1}}=0,0409мм$.

 Проверяем наличие промахов, то есть отсчетов с $∆D\_{i} >3S\_{n}^{ʹ}$, таковых в приведенной выборке нет.

 Рассчитываем доверительный интервал $∆D$, задаваясь определенным значением доверительной вероятности Р, например, Р = 0,95(95%).

 Из таблицы Приложения находим коэффициент Стьюдента $t\_{10;0,95}=2,3$. Тогда $∆D=\frac{S\_{n}∙t\_{n,p}}{\sqrt{n}}= \frac{0,049∙2,3}{\sqrt{10}}=0,0356 мм $или, после округления , $∆D≈0,04 мм$. Соответственно округляем значение диаметра и записываем окончательный результат: $D=\left(19,81\pm 0,04\right)мм; $ $ε\_{D}=0,2\%$; Р = 0,95.

1. При соизмеримости приборной $δ$ и случайной $∆X$ погрешностей, результирующая погрешность может быть оценена по формуле:

 $∆Х\_{Σ}$ = $\sqrt{δ^{2}+ ∆Х^{2}}$.

**Расчет погрешности косвенных измерений**

В случае косвенных измерений некоторой величины У она рассчитывается

на основании известной функциональной связи ее с другими, прямо измеряемыми величинами $Х\_{1}$, $Х\_{2}$,…, $Х\_{i}$, …, $Х\_{N}$,то есть $У=f(Х\_{1}$, $Х\_{2}$,…, $Х\_{i}$, …, $Х\_{N}). $Если случайные погрешности этих, прямо измеряемых величин $Х\_{k}$ снижены до значений, много меньших соответствующих приборных погрешностей $δ\_{k}$, то погрешность косвенно измеряемой величины У обычно характеризуют заданием так называемой максимальной погрешности $∆У$. Под нею понимается максимальное приращение функции, вызванное приращениями $∆Х\_{k}= δ\_{k}$ ее аргументов $Х\_{k}$:

$∆У= \left|\frac{∂f}{∂X\_{1}}\right|∆X\_{1}+\left|\frac{∂f}{∂X\_{2}}\right|∆X\_{2}+…+\left|\frac{∂f}{∂X\_{N}}\right|∆X\_{N}= \sum\_{k=1}^{N}\left|\frac{∂f}{∂X\_{k}}\right|∆X\_{k}$*,*

где $\frac{∂f}{∂X\_{k}}-$ частная производная от косвенно измеряемой величины У по k-му ее аргументу $Х\_{k}$.

 Часто более целесообразным представляется сразу вычислить относительную максимальную погрешность $ε\_{у}$ косвенно измеряемой величины У по формуле:

 $ε\_{у}=\frac{∆У}{У}= \sum\_{k=1}^{N}\left|\frac{∂lnf}{∂X\_{k}}\right|∆X\_{k}$.

 Из этой форму следует, в частности, что относительная погрешность величины У, являющейся произведением (или частным) $Х\_{k}$, равна сумме относительных погрешностей ее сомножителей.

 Пример получения формулы для абсолютной $∆У$ и относительной $ε\_{у} $погрешностей в применении к объему цилиндра ($V=\frac{πD^{2}H}{4}$):

$$∆V= \left|\frac{∂V}{∂D}\right|∆D+\left|\frac{∂V}{∂H}\right|∆H= \frac{2πDH}{4}∆D+\frac{πD^{2}}{4}∆H$$

 $ε\_{V}= \frac{∆V}{V}= \sum\_{k=1}^{N}\left|\frac{∂\left(lnV\right)}{∂X\_{k}}\right|∆X\_{k}= \left|\frac{∂\left[ln\left(\frac{πD^{2}H}{4}\right)\right]}{∂D}\right|∆D+\left|\frac{∂\left[ln\left(\frac{πD^{2}H}{4}\right)\right]}{∂H}\right|∆H=$

$= \frac{2∆D}{D}+ \frac{∆H}{H}=2ε\_{D}+ε\_{H}$.

 Если в измерениях прямо измеряемых величин $Х\_{k}$ доминируют случайные погрешности, то для величины У рассчитывается абсолютная погрешность $∆У$ по формуле:

$∆У= S\_{yn}^{ʹ}∙t\_{n,p}$, где $S\_{yn}^{ʹ}= \sqrt{\sum\_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{∂f}{∂X\_{k}}\right)S\_{nk}^{ʹ}\right]^{2}}$, а $S\_{nk}^{ʹ}- $среднеквадратичное отклонение среднего арифметического значения величины $Х\_{k}$. Предполагается, что все прямо измеренные величины $Х\_{k}$ имеют одинаковое число отсчетов n.

 Среднее арифметическое значение $ <У>$ вычисляется путем подстановки в формулу $У=f(Х\_{1}$, $Х\_{2}$,…, $Х\_{k}$) средних значений аргументов $<Х\_{1}>$, $<Х\_{2}>$, …, $ <Х\_{k}>$. Окончательный результат записывается в виде:

 У = $<У> \pm $ $∆У$; $ε\_{у}= \frac{∆У}{<У>}100\%; Р= .$

**Приложение**

**Таблица коэффициентов Стьюдента**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n/P | 0,68 | 0,80 | 0,95 | 0,99 | 0,995 |
| 2 | 2,0 | 4,1 | 12,7 | 63,7 | 636,6 |
| 3 | 1,3 | 1,9 | 4,3 | 9,9 | 31,6 |
| 4 | 1,3 | 1,6 | 3,2 | 5,8 | 12,8 |
| 5 | 1,2 | 1,5 | 2,8 | 4,6 | 8,6 |
| 6 | 1,2 | 1,5 | 2,6 | 4,0 | 6,9 |
| 8 | 1,1 | 1,4 | 2,4 | 3,5 | 5,4 |
| 10 | 1,1 | 1,4 | 2,3 | 3,3 | 4,8 |
| 12 | 1,1 | 1,4 | 2,2 | 3,1 | 4,5 |
| 14 | 1,1 | 1,4 | 2,2 | 3,0 | 4,2 |
| 15 | 1,1 | 1,4 | 2,1 | 3,0 | 4,1 |
| 20 | 1,1 | 1,3 | 2,1 | 2,9 | 3,9 |
| 25 | 1,1 | 1,3 | 2,1 | 2,9 | 3,7 |
| 30 | 1,1 | 1,3 | 2,1 | 2,8 | 3,7 |