

Множество Мандельброта и его кубический аналог

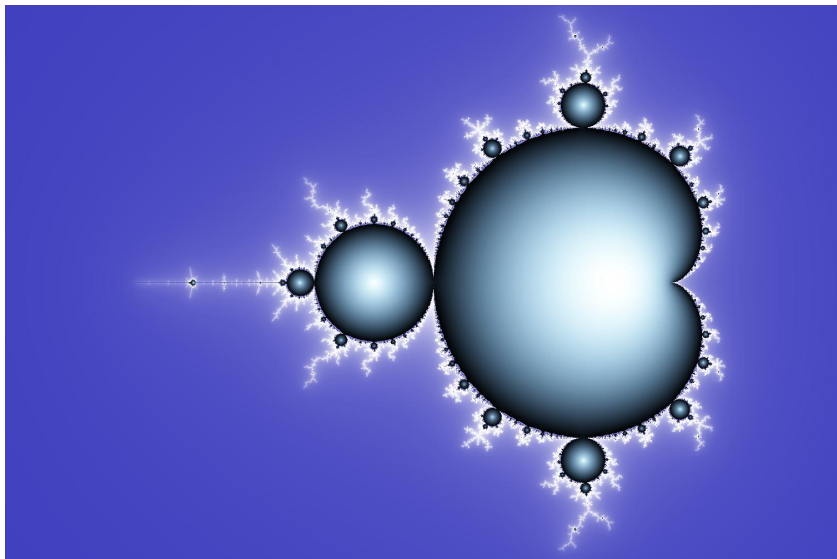
В.А. Тиморин*

*Факультет Математики

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики

30 мая 2018 г.

Множество Мандельброта



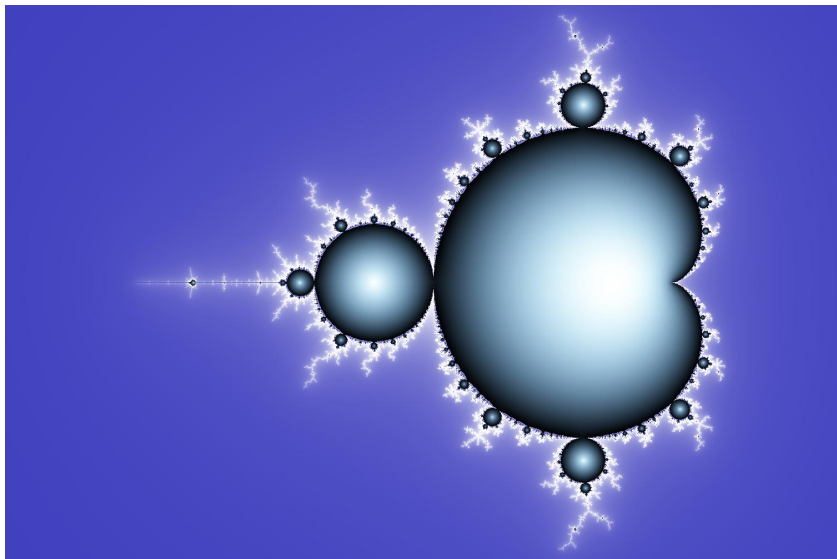
Множество Мандельброта

Множество Мандельброта — это множество комплексных чисел c , таких, что последовательность

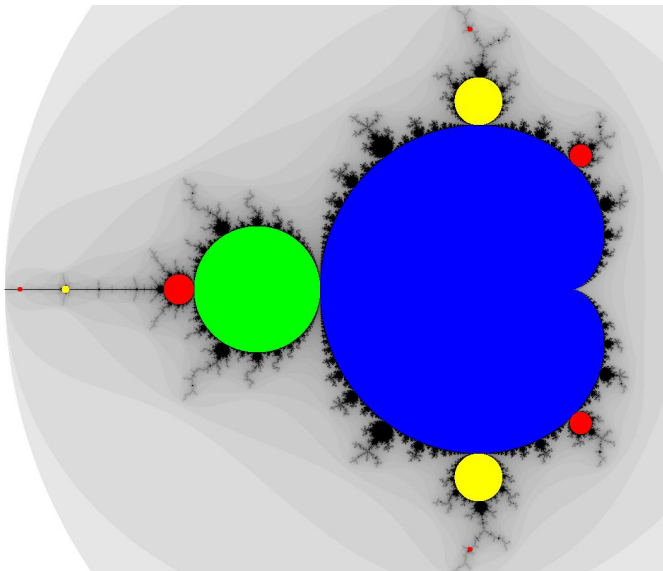
$$0, \quad c, \quad c^2 + c, \quad (c^2 + c)^2 + c, \quad \dots$$

ограниченна.

Множество Мандельброта



Множество Мандельброта



Множество Жюлиа

- **Орбита** точки z при действии отображения $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — это последовательность $z, f(z), f(f(z)), \dots$.
- **Заполненное множество Жюлиа** $K(p_c)$ многочлена $p_c(z) = z^2 + c$ — множество точек z , орбиты которых при действии p_c не убегают на бесконечность.
- **Множество Жюлиа** $J(p_c)$ многочлена p_c — граница заполненного множества Жюлиа.

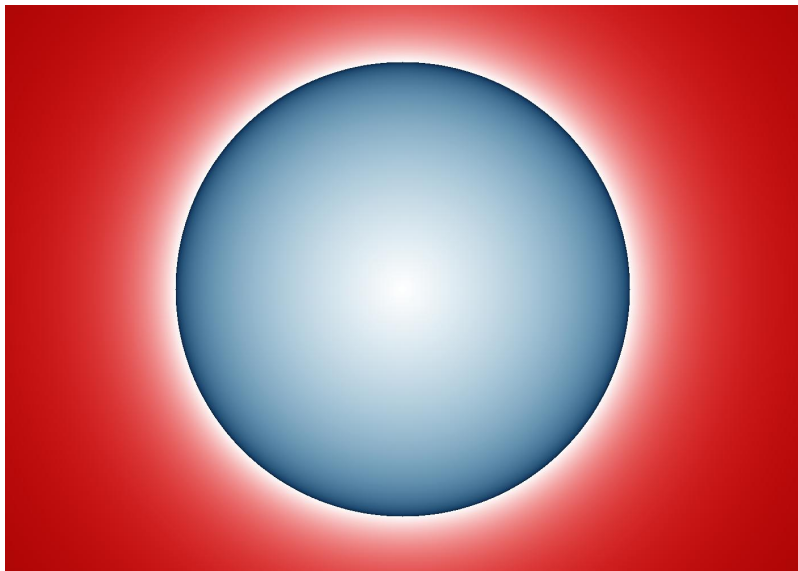
Множество Жюлиа

- **Орбита** точки z при действии отображения $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — это последовательность $z, f(z), f(f(z)), \dots$.
- **Заполненное множество Жюлиа $K(p_c)$** многочлена $p_c(z) = z^2 + c$ — множество точек z , орбиты которых при действии p_c не убегают на бесконечность.
- **Множество Жюлиа $J(p_c)$** многочлена p_c — граница заполненного множества Жюлиа.

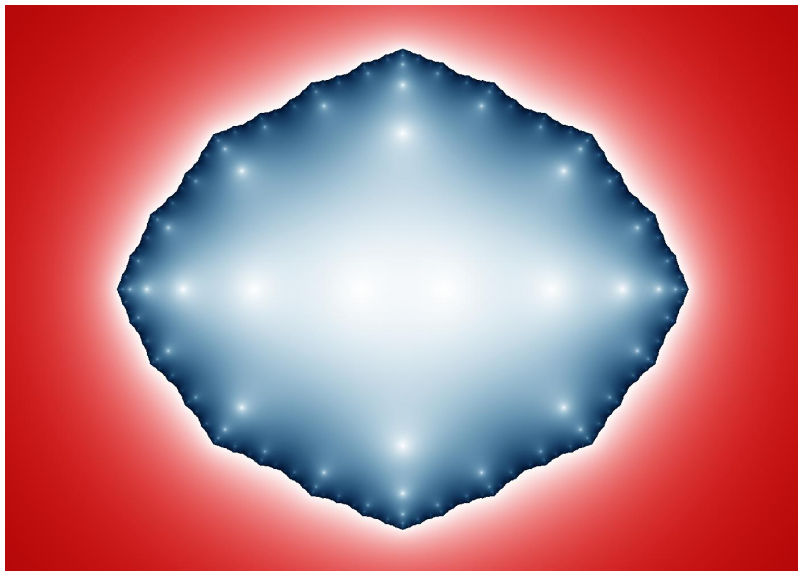
Множество Жюлиа

- **Орбита** точки z при действии отображения $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — это последовательность $z, f(z), f(f(z)), \dots$.
- **Заполненное множество Жюлиа $K(p_c)$** многочлена $p_c(z) = z^2 + c$ — множество точек z , орбиты которых при действии p_c не убегают на бесконечность.
- **Множество Жюлиа $J(p_c)$** многочлена p_c — граница заполненного множества Жюлиа.

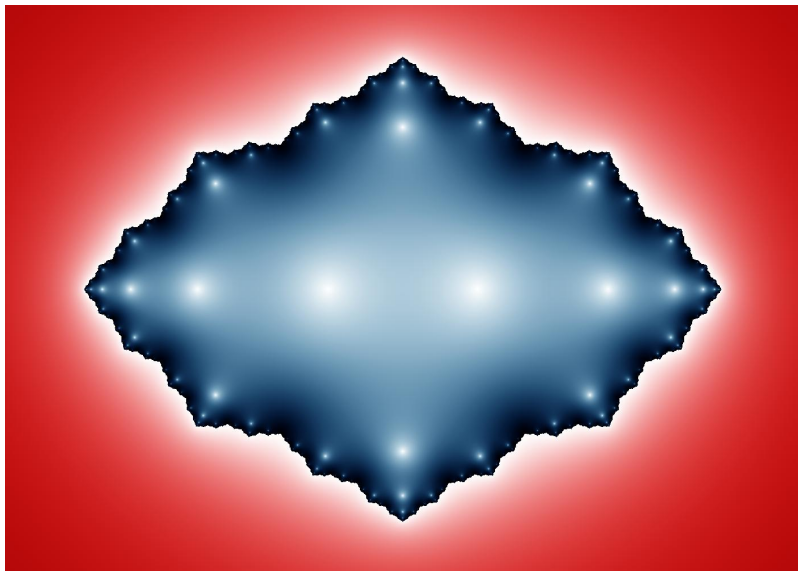
$$f(z) = z^2$$



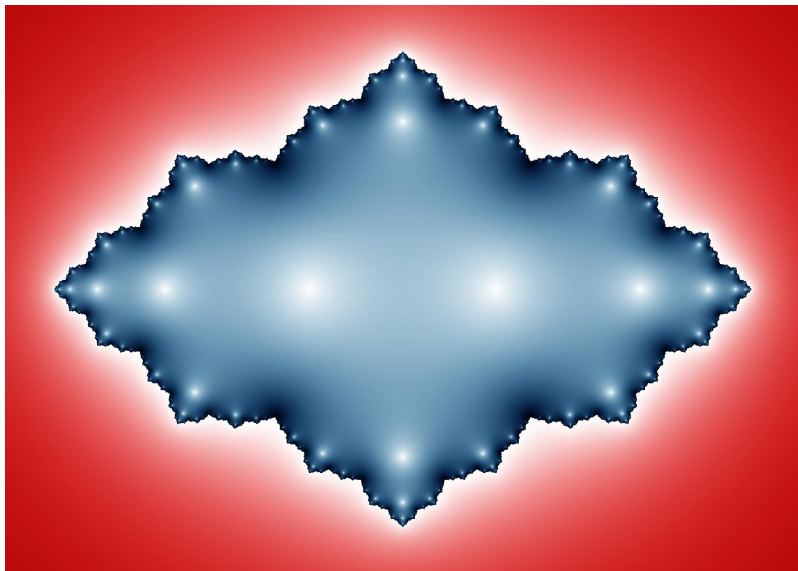
$$f(z) = z^2 - 0.2$$



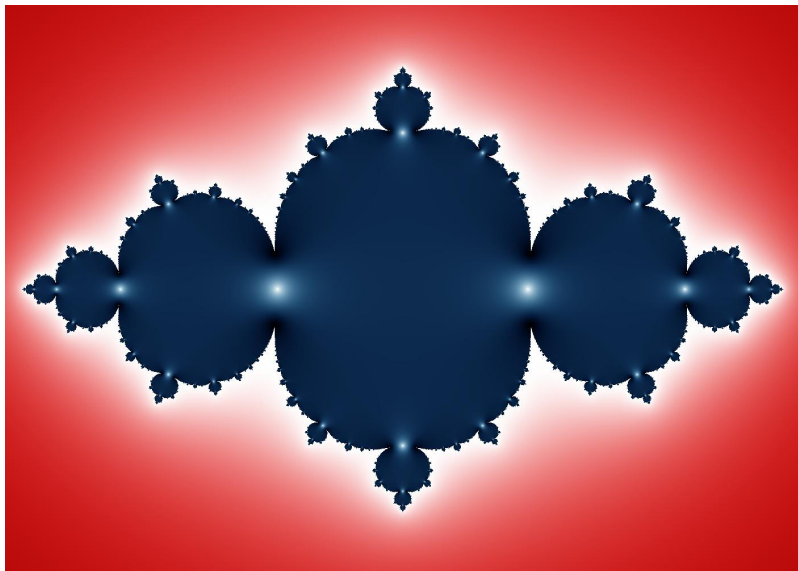
$$f(z) = z^2 - 0.4$$



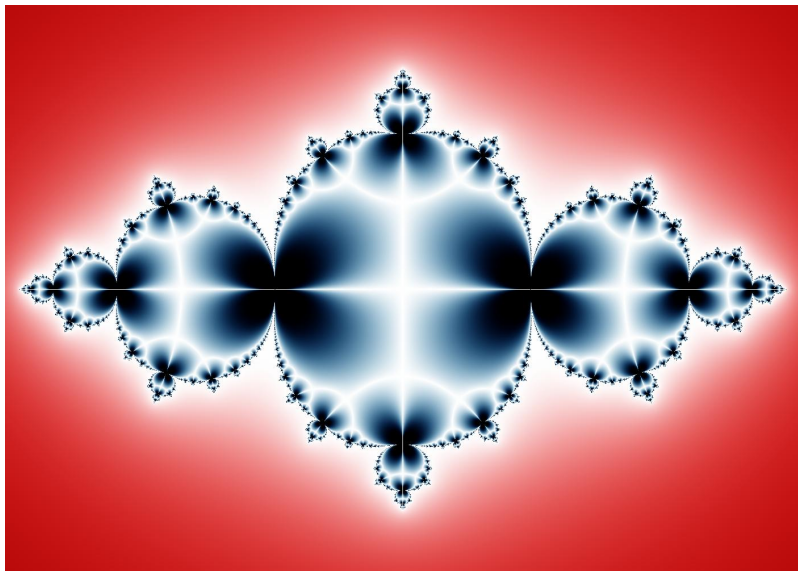
$$f(z) = z^2 - 0.5$$



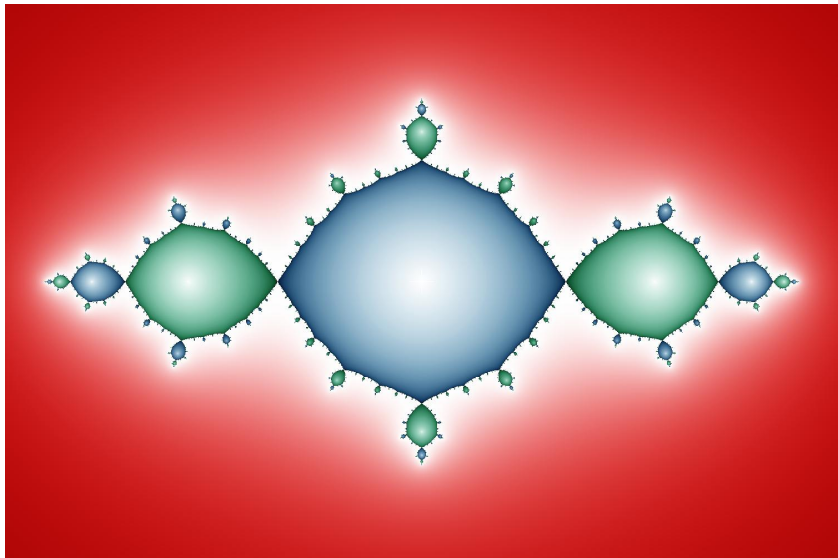
$$f(z) = z^2 - 0.73$$



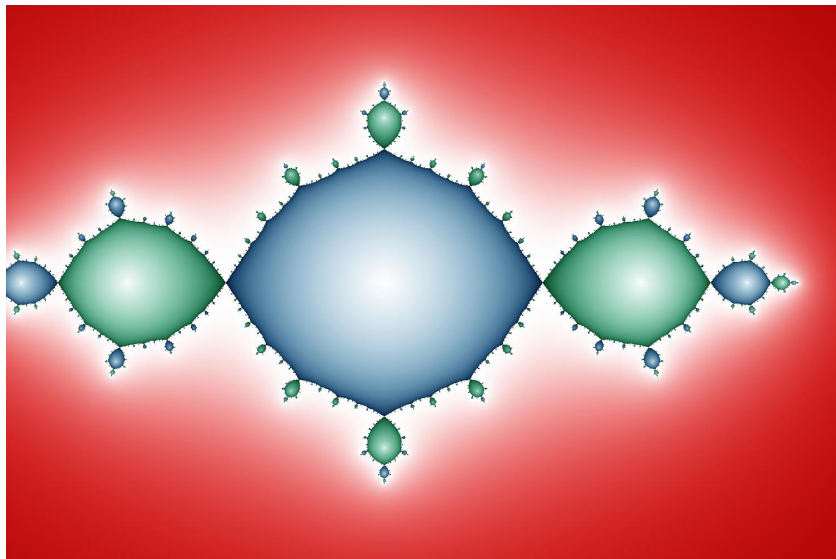
Параболическая бифуркация: $f(z) = z^2 - 0.75$



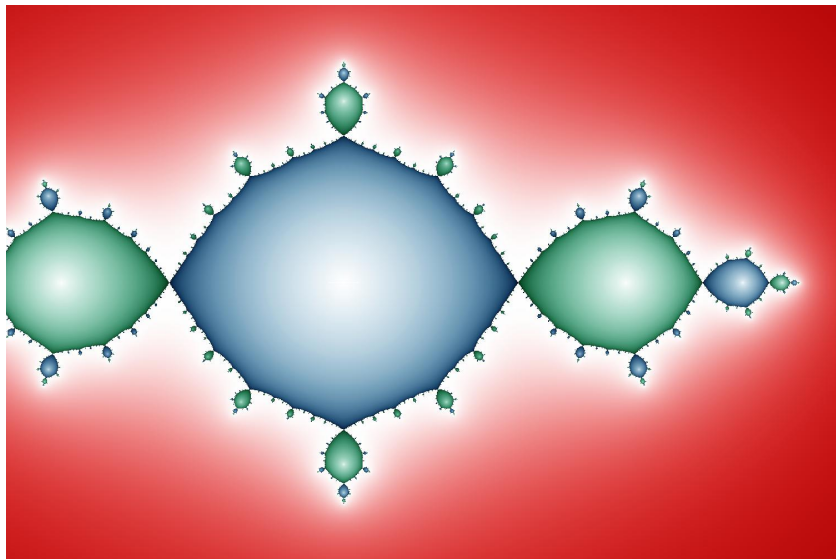
Базилика: $f(z) = z^2 - 1$



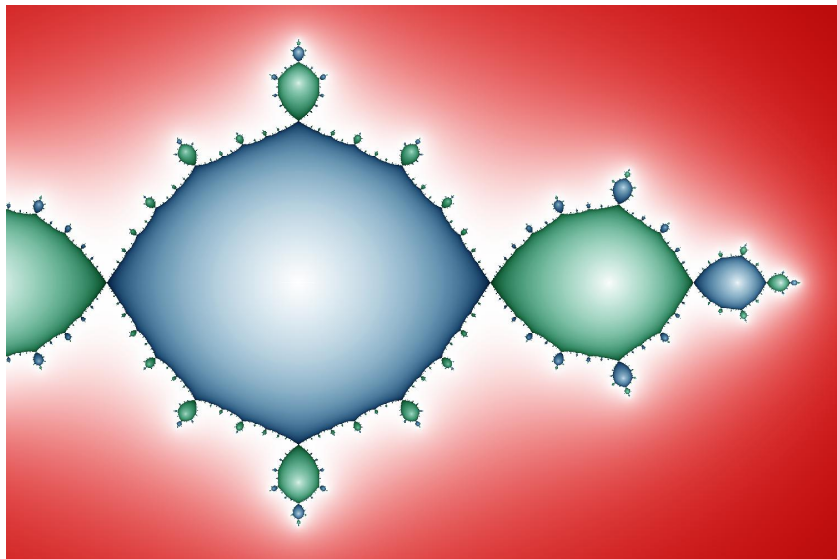
$$f(z) = z^2 - 1$$



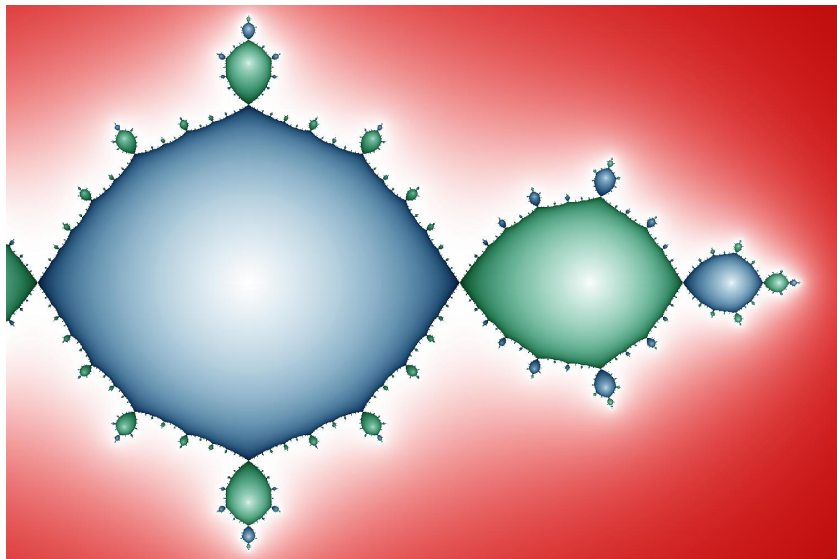
$$f(z) = z^2 - 1$$



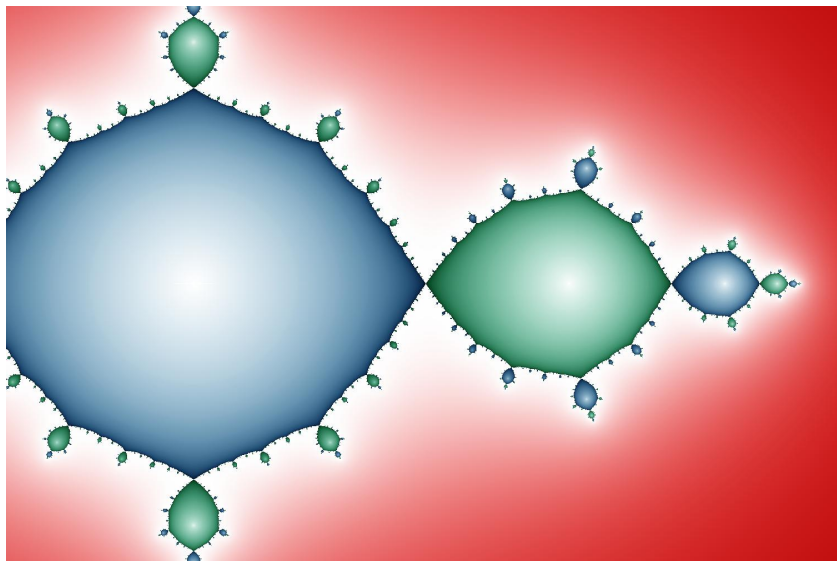
$$f(z) = z^2 - 1$$



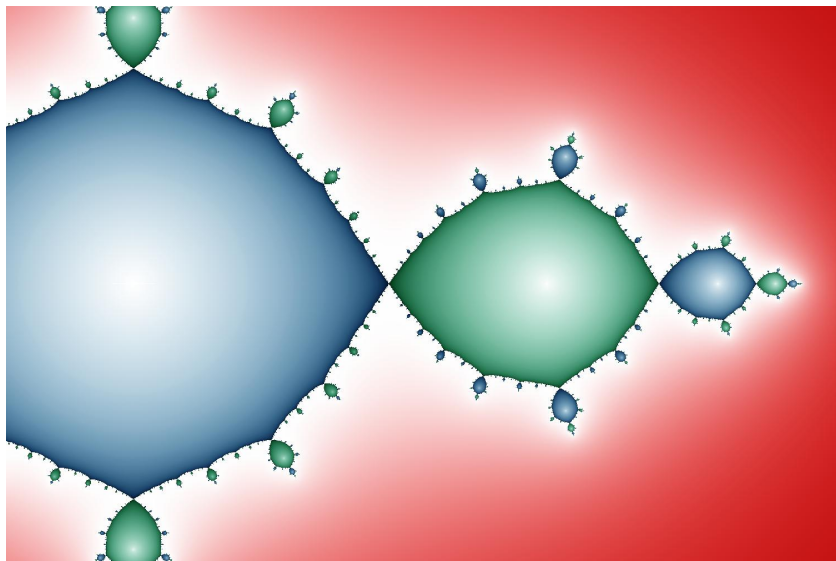
$$f(z) = z^2 - 1$$



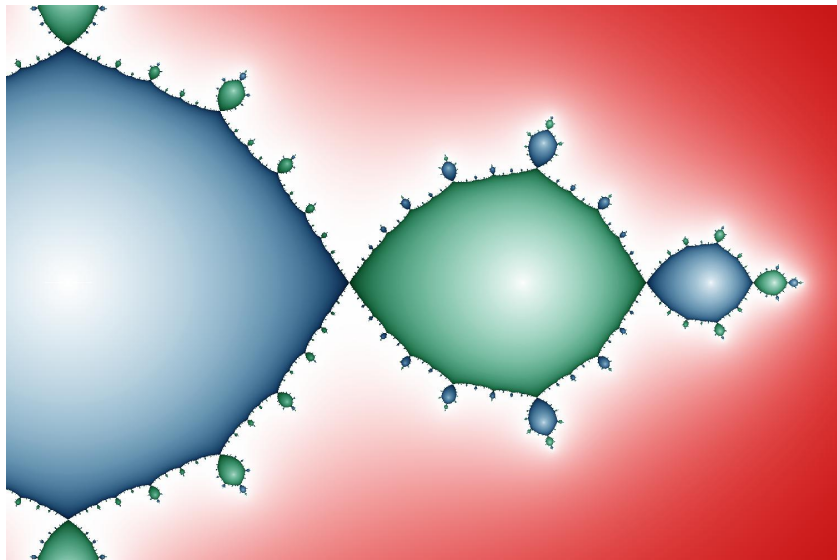
$$f(z) = z^2 - 1$$



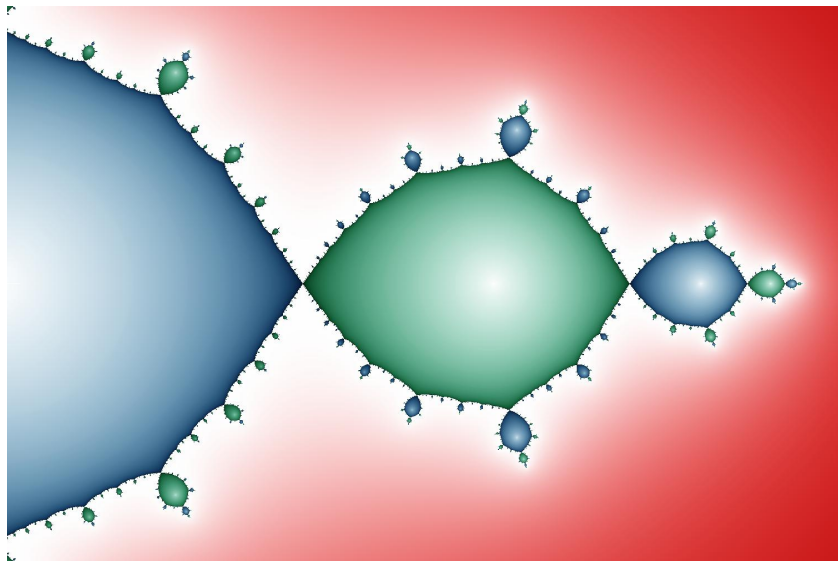
$$f(z) = z^2 - 1$$



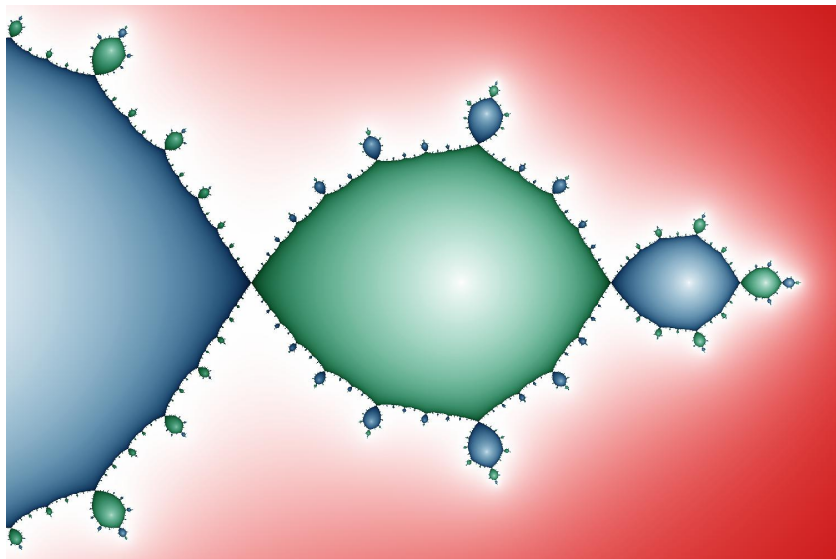
$$f(z) = z^2 - 1$$



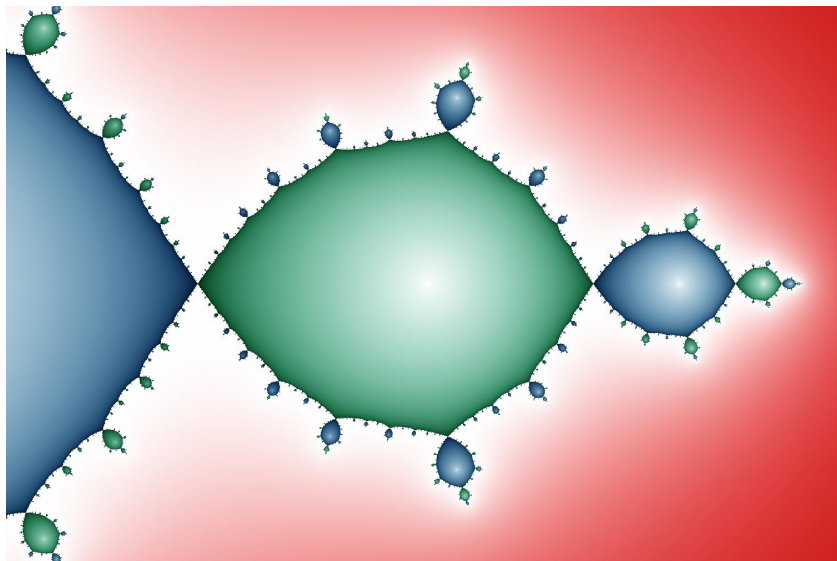
$$f(z) = z^2 - 1$$



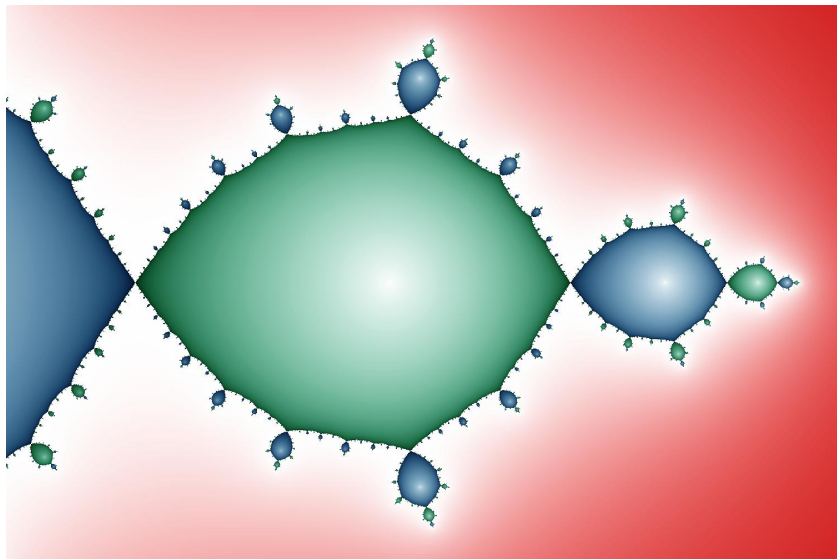
$$f(z) = z^2 - 1$$



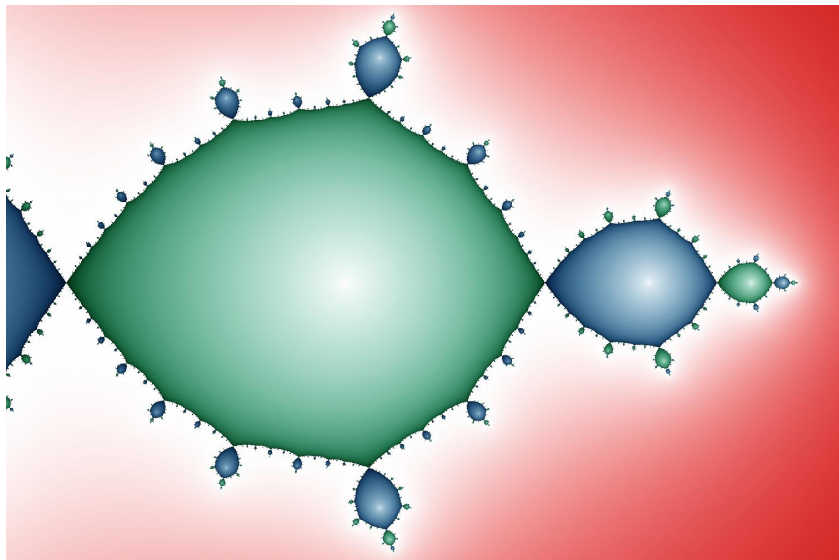
$$f(z) = z^2 - 1$$



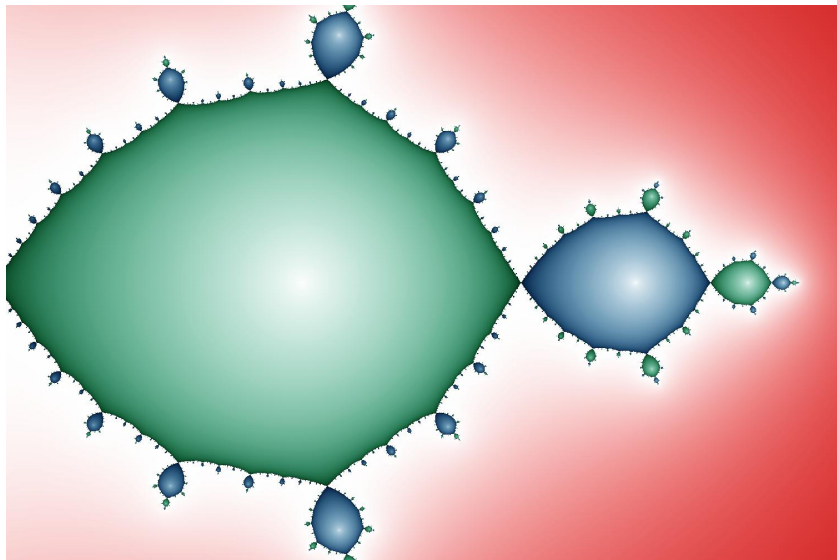
$$f(z) = z^2 - 1$$



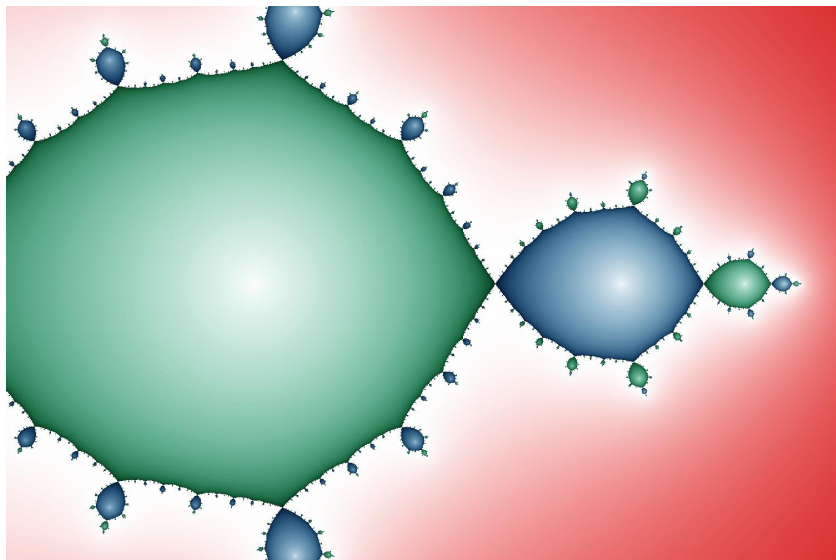
$$f(z) = z^2 - 1$$



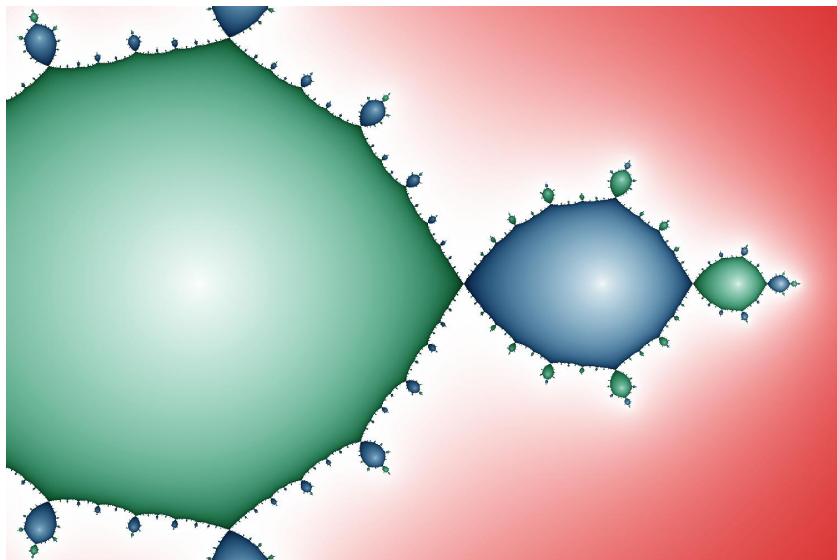
$$f(z) = z^2 - 1$$



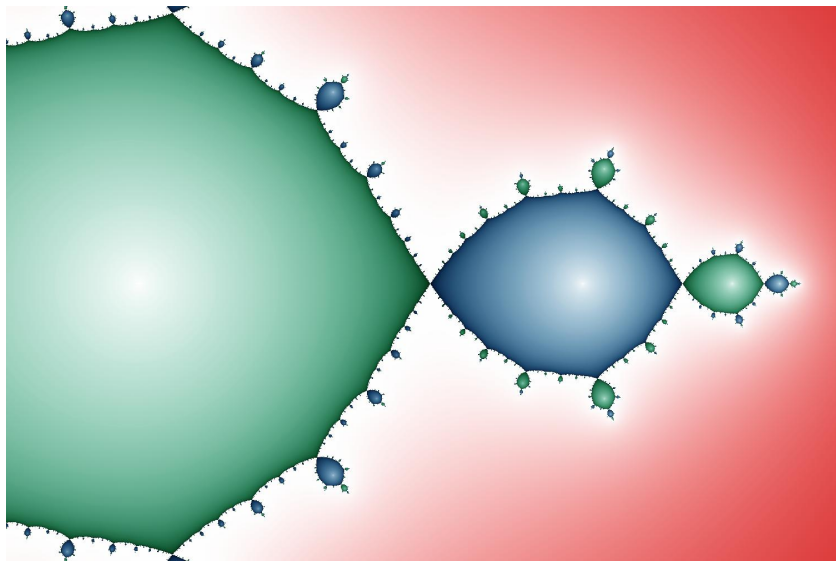
$$f(z) = z^2 - 1$$



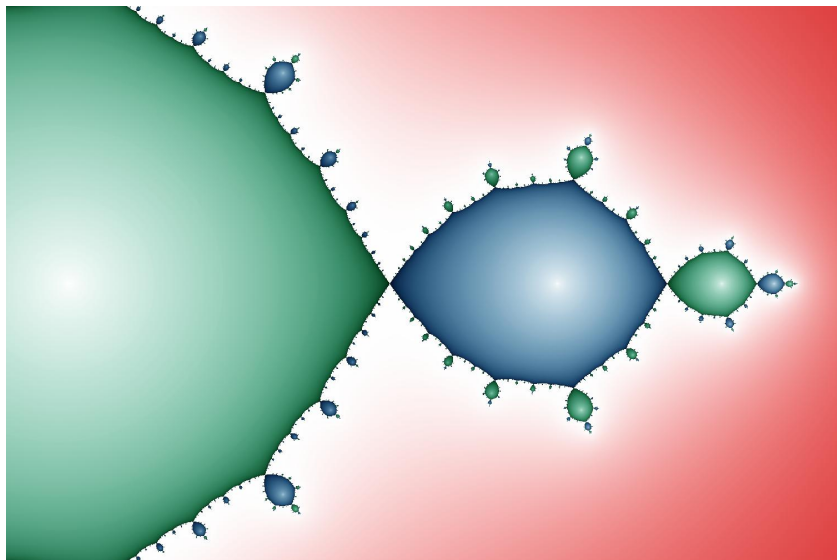
$$f(z) = z^2 - 1$$



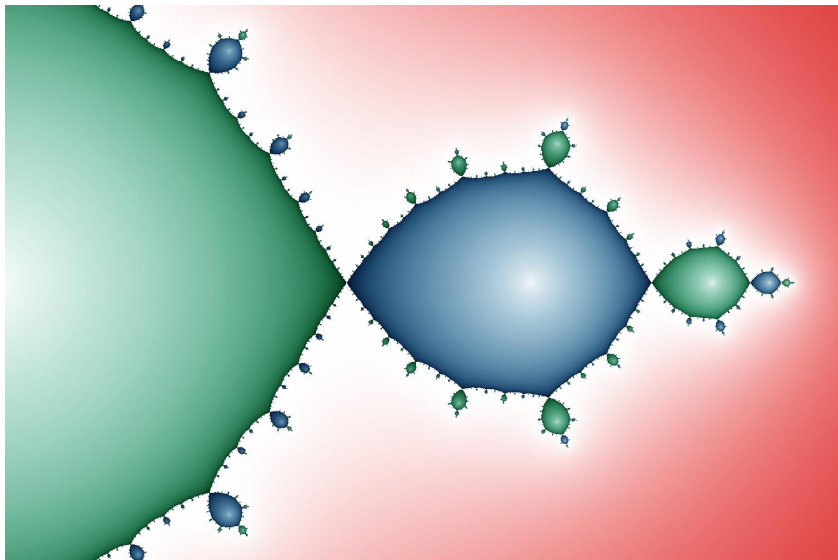
$$f(z) = z^2 - 1$$



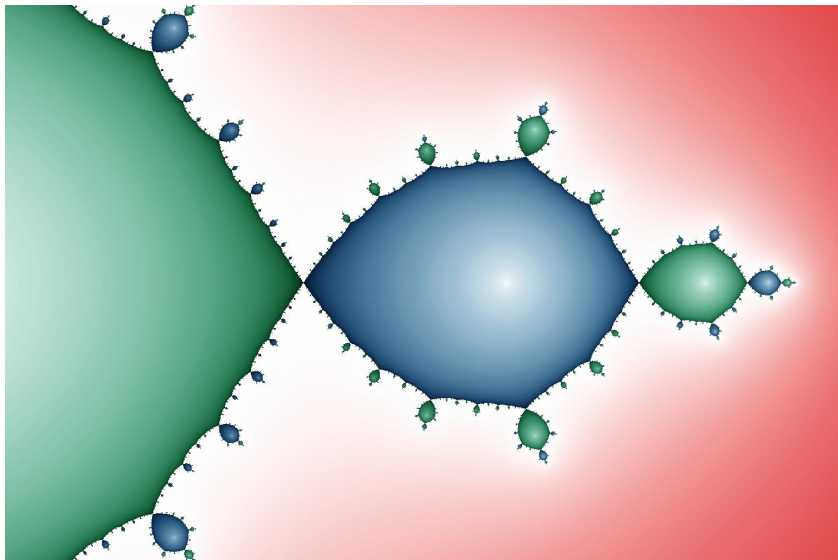
$$f(z) = z^2 - 1$$



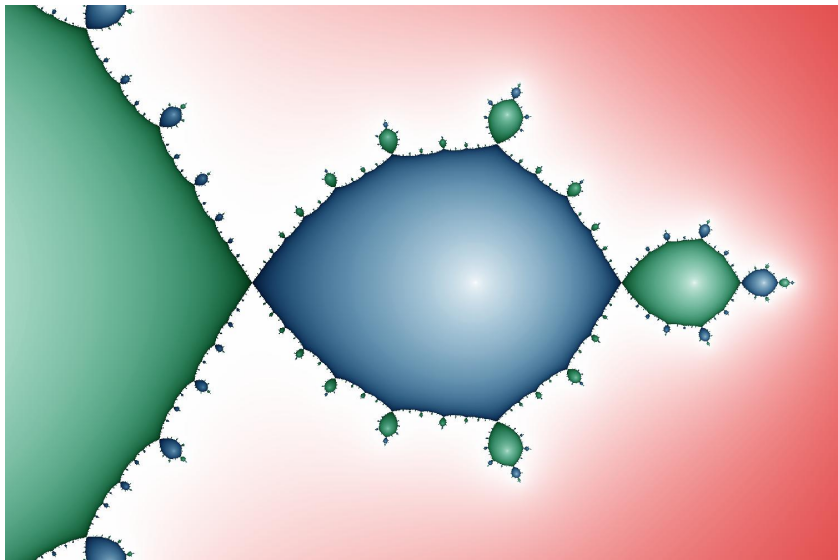
$$f(z) = z^2 - 1$$



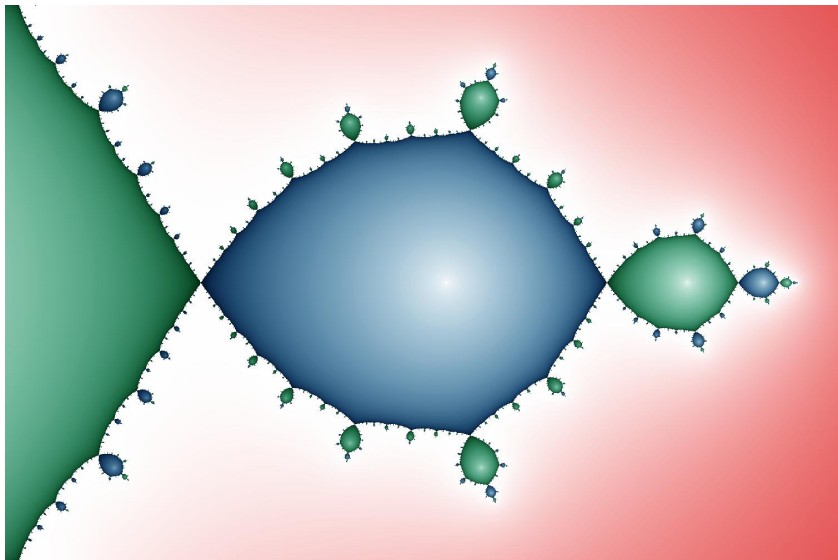
$$f(z) = z^2 - 1$$



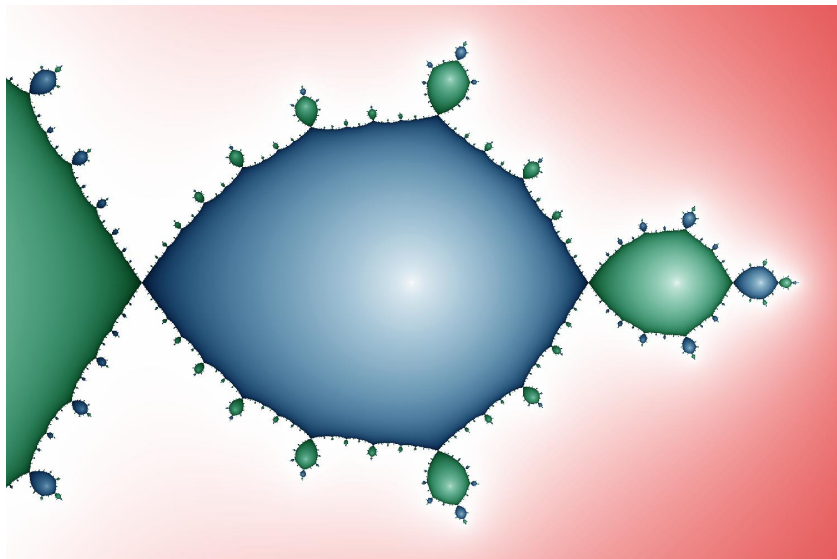
$$f(z) = z^2 - 1$$



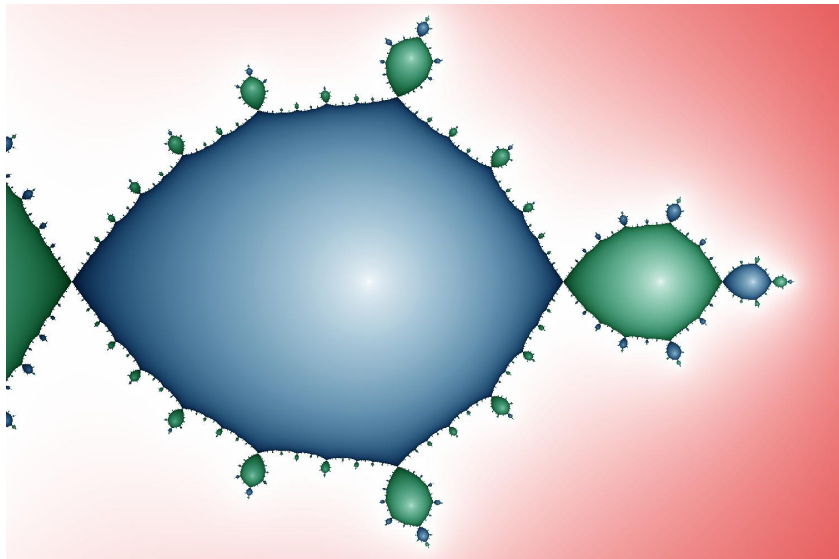
$$f(z) = z^2 - 1$$



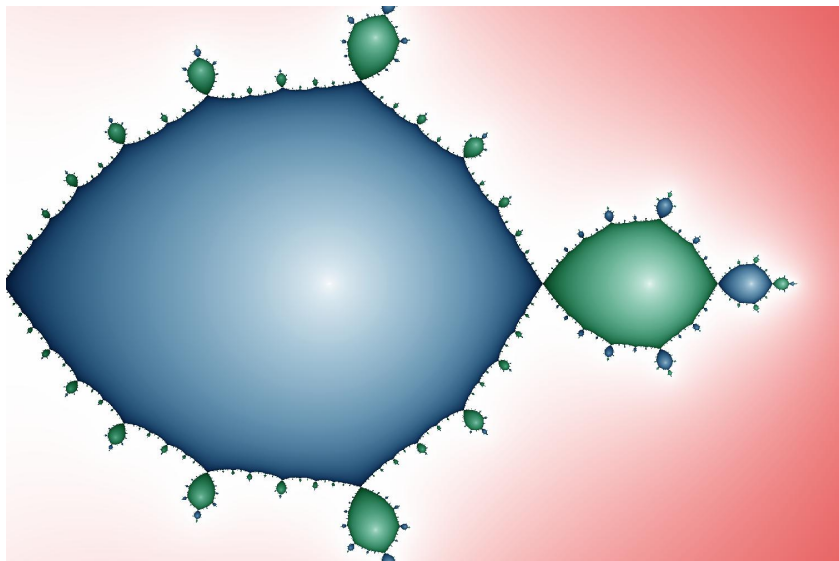
$$f(z) = z^2 - 1$$



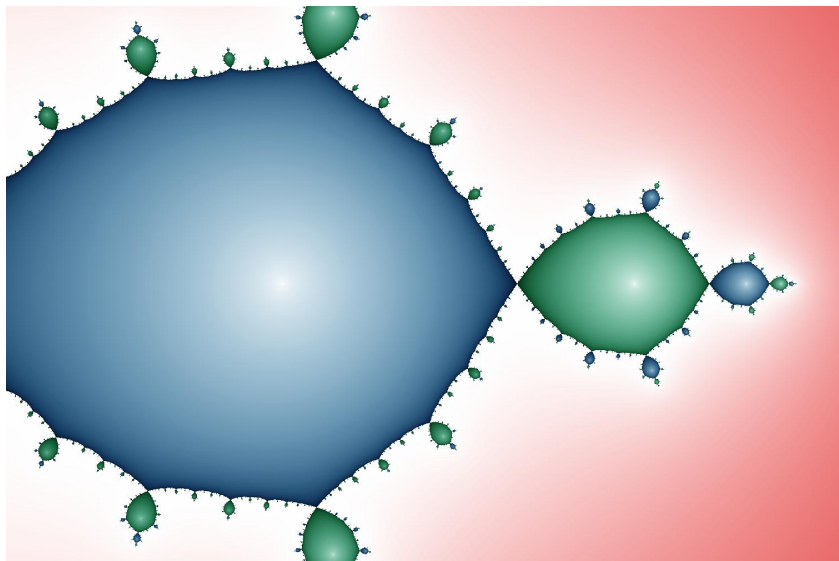
$$f(z) = z^2 - 1$$



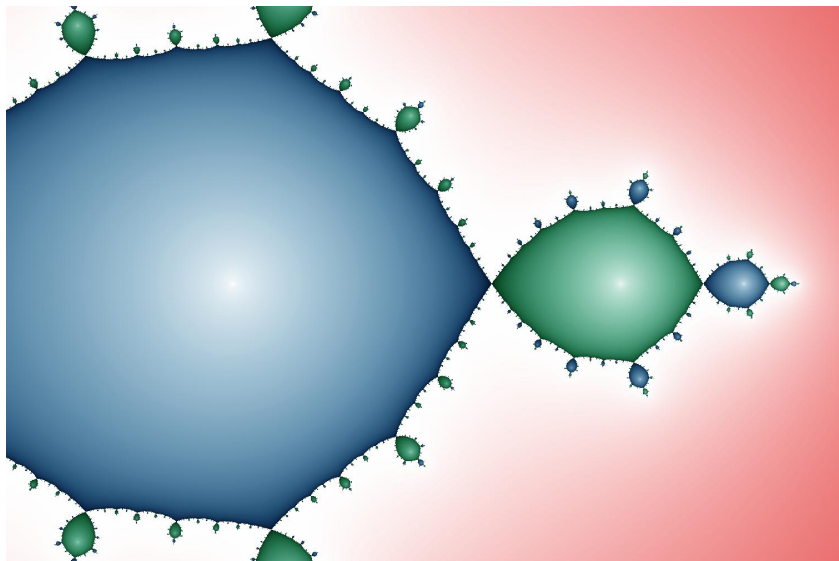
$$f(z) = z^2 - 1$$



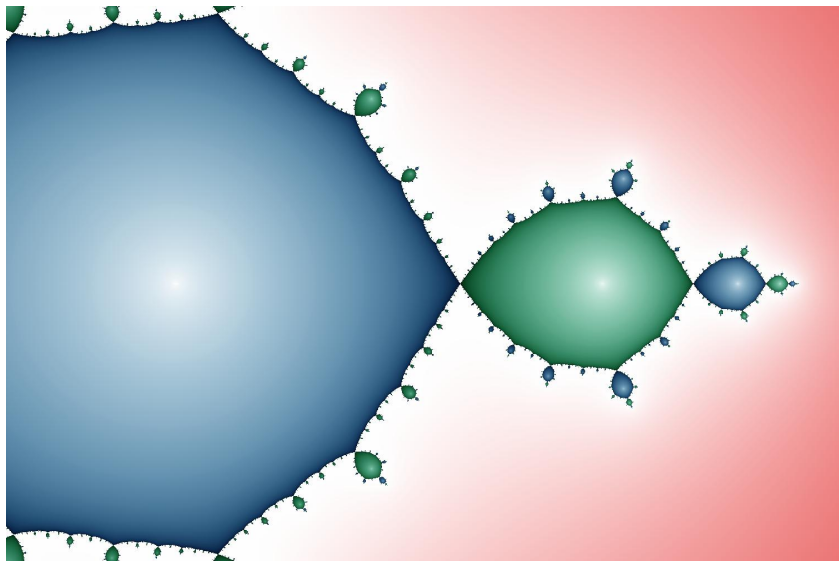
$$f(z) = z^2 - 1$$



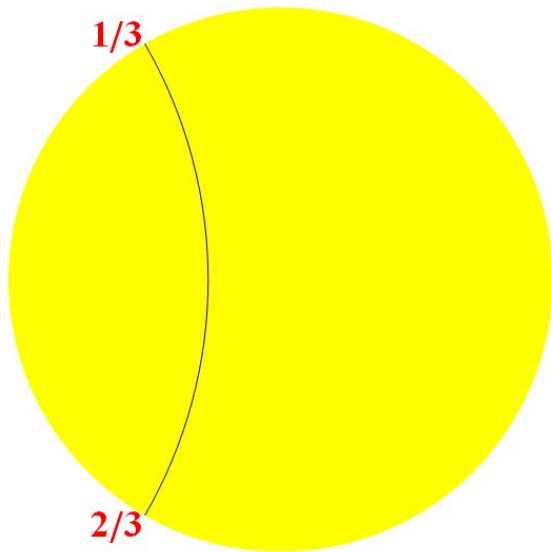
$$f(z) = z^2 - 1$$



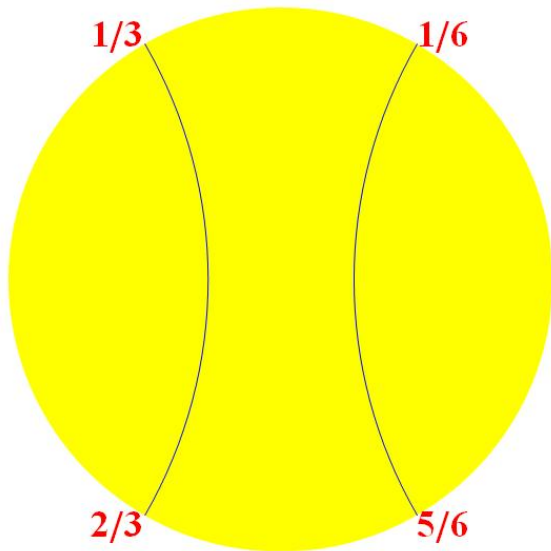
$$f(z) = z^2 - 1$$



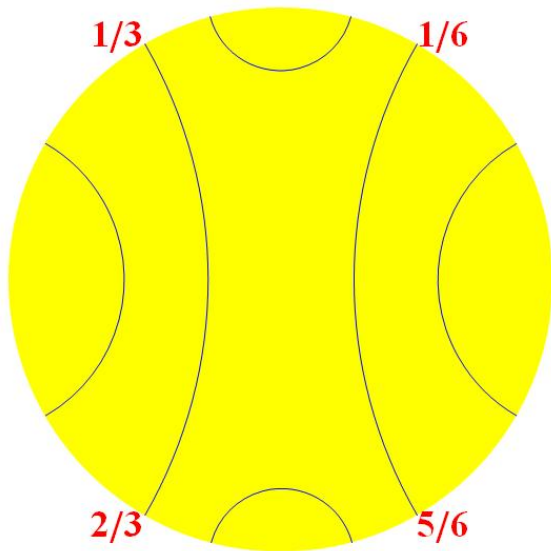
Ламинация для $z^2 - 1$



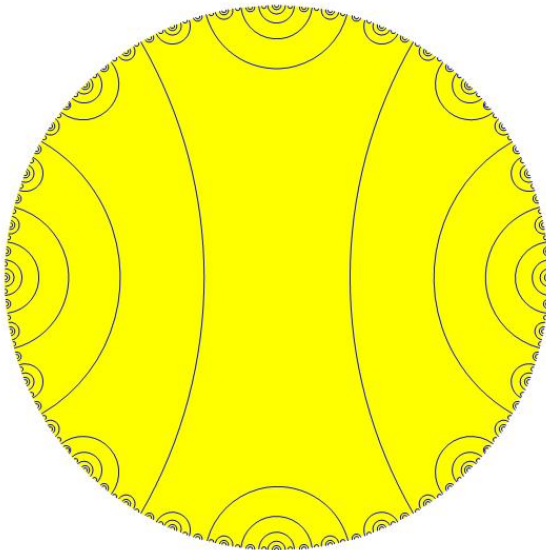
Ламинация для $z^2 - 1$



Ламинация для $z^2 - 1$



Ламинация для $z^2 - 1$



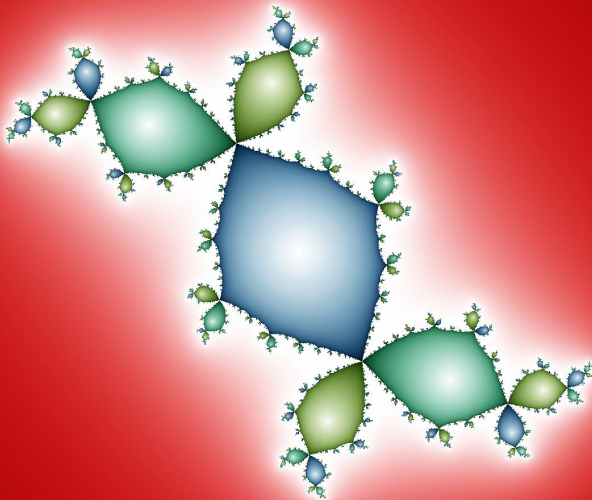
Ламинации

(Геодезической) ламинацией в диске называется множество хорд (или геодезических в метрике Пуанкаре) — так называемых **листов** со следующими свойствами:

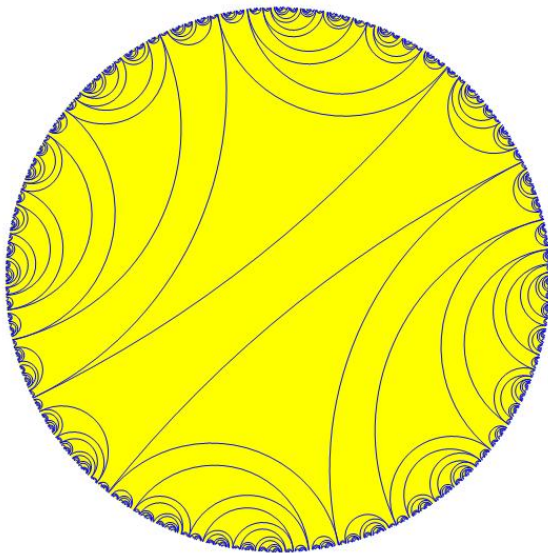
- различные листы не пересекаются внутри диска;
- предел последовательности листов — либо лист, либо точка.

Замыкания компонент дополнения до объединения листов в диске называются **щелями**. Щели называются **конечными** или **бесконечными** в зависимости от того, конечно или бесконечно пересечение щели с границей диска.

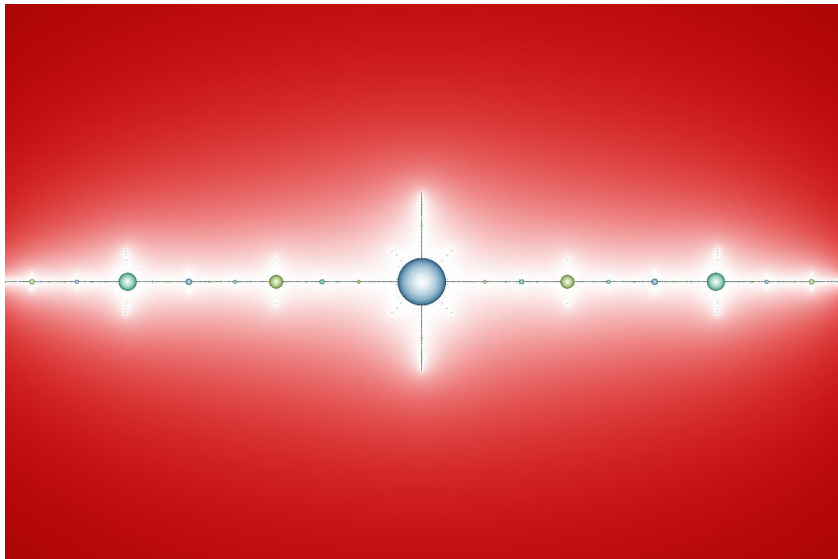
Кролик: $f(z) = z^2 - 0.12.. + 0.74..i$



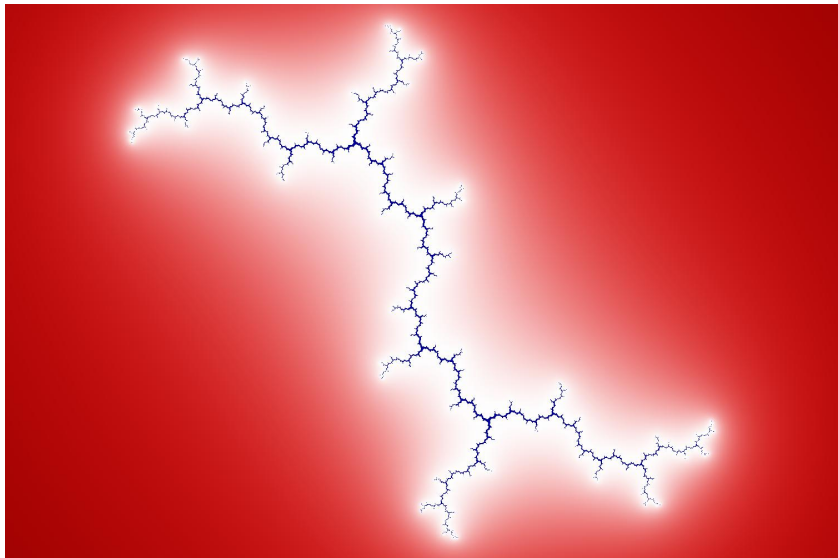
Ламинация для кролика



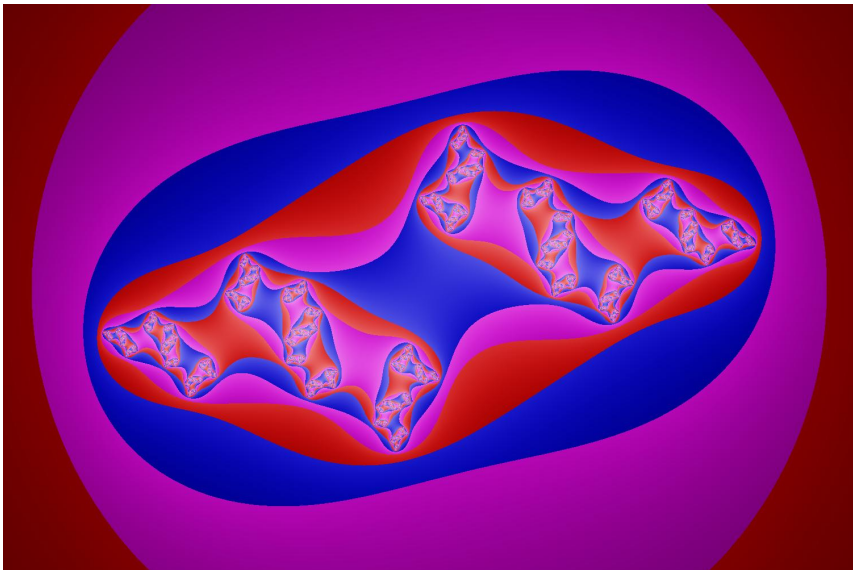
Самолет: $f(z) = z^2 - 1.75..$



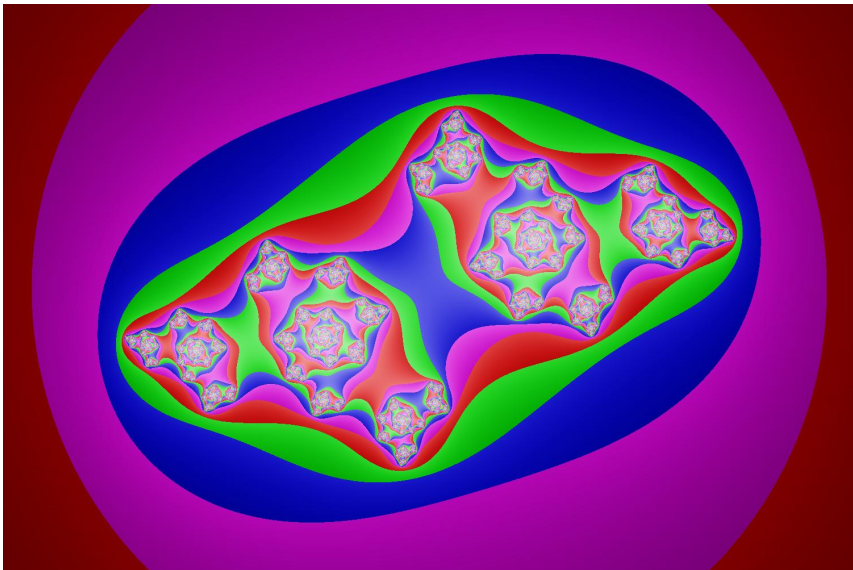
Дендрит: $f(z) = z^2 + i$



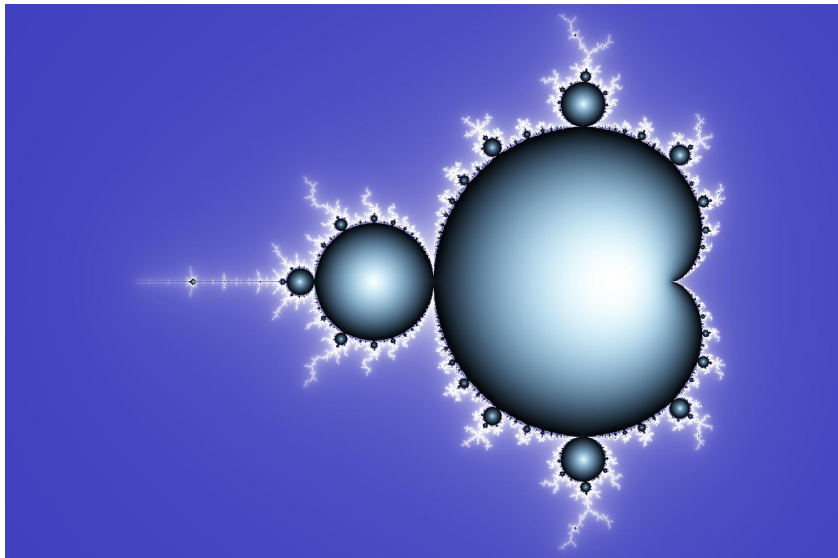
Канторово множество



Канторово множество



Плоскость параметра c для семейства $z^2 + c$



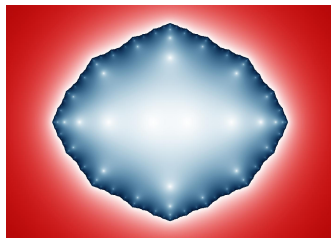
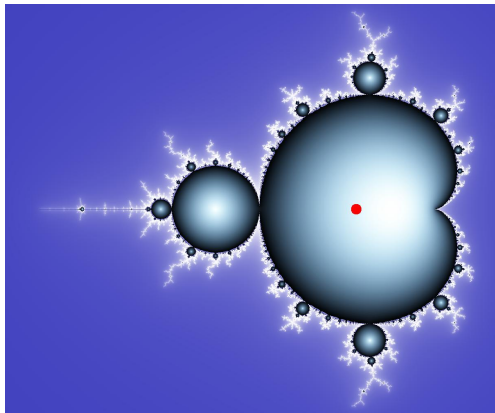
Множество Мандельброта

Множество Мандельброта — это множество комплексных чисел c , таких, что последовательность

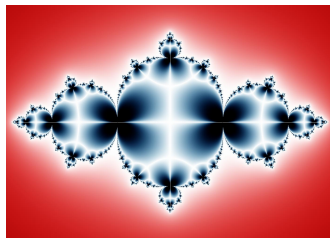
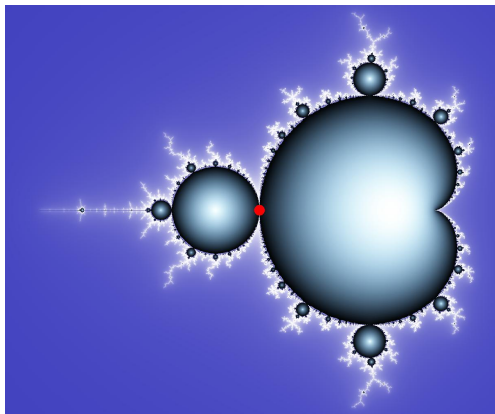
$$0, \quad c, \quad c^2 + c, \quad (c^2 + c)^2 + c, \quad \dots$$

ограниченна. Если $c \notin M$, то $J(p_c) = K(p_c)$ гомеоморфно канторову множеству. Если $c \in M$, то $J(p_c)$ (и $K(p_c)$) связно.

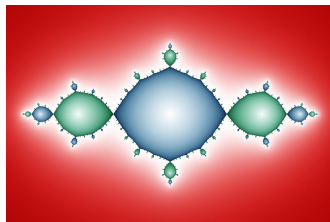
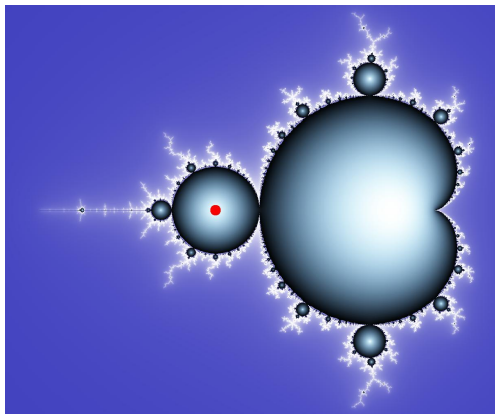
Множество Мандельброта



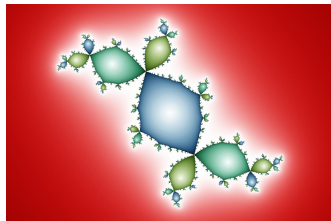
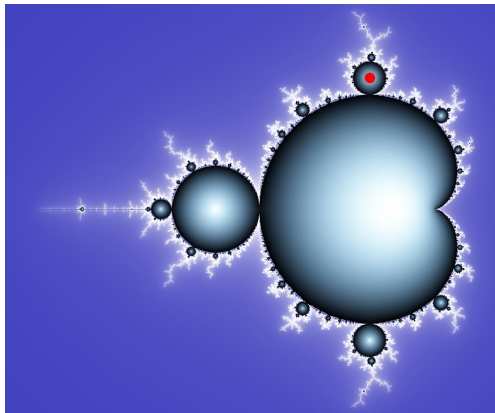
Множество Мандельброта



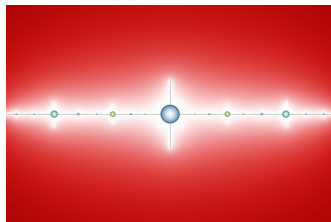
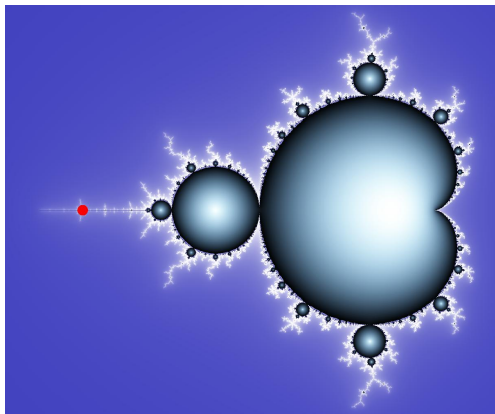
Множество Мандельброта



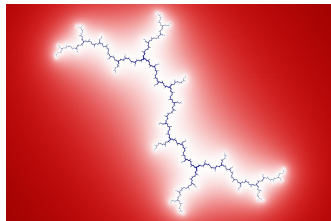
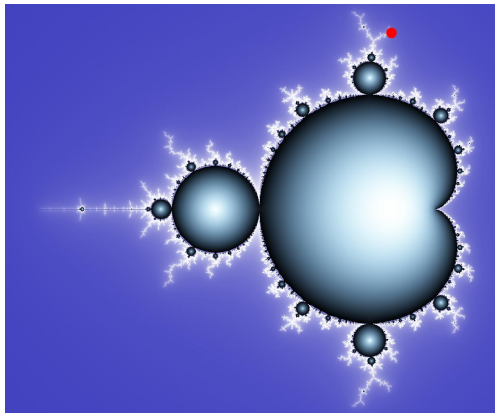
Множество Мандельброта



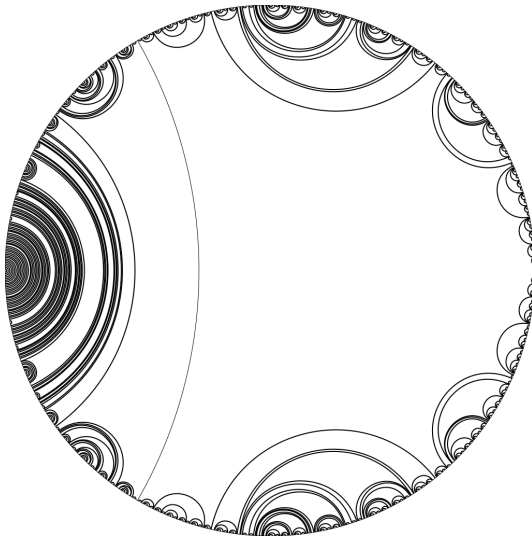
Множество Мандельброта



Множество Мандельброта



Квадратичная минорная ламинация

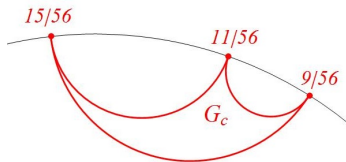
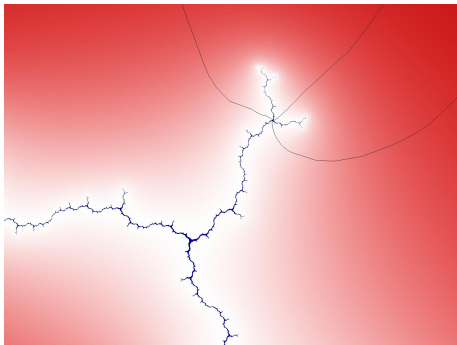


Минорные щели дендритных квадратичных многочленов

Пусть $P_c = z^2 + c$ — дендритный многочлен;

В ламинации для P_c точке c соответствует многоугольник G_c .

Он называется **минорной щелью** для P_c .



Минорные щели дендритных квадратичных многочленов

Следующая теорема следует из классических результатов Дуади, Хаббарда и Терстона.

Теорема

Если c, c' — дендритные параметры, то $G_c \cap G_{c'} = \emptyset$ or $G_c = G_{c'}$. Отображение $c \mapsto G_c$ полунепрерывно сверху.

Минорные щели составляют «совершенную» часть квадратичной минорной ламинации.

Минорные щели дендритных квадратичных многочленов

Следующая теорема следует из классических результатов Дуади, Хаббарда и Терстона.

Теорема

Если c, c' — дендритные параметры, то $G_c \cap G_{c'} = \emptyset$ or $G_c = G_{c'}$. Отображение $c \mapsto G_c$ полунепрерывно сверху.

Минорные щели составляют «совершенную» часть квадратичной минорной ламинации.

Ярлыки кубических дендритных многочленов

Рассмотрим кубические многочлены f с отмеченными критическими точками c , d , то есть тройки (f, c, d) .

Обозначим через c^* единственную точку такую что $f(c^*) = f(c)$ и $c^* \neq c$ при условии $c \neq d$. Предположим, что f дендритный. Тогда в ламинации для многочлена f точкам c^* и $f(d)$ соответствуют конечные щели/листы G_{c^*} и $G_{f(d)}$.

Произведение $G_{c^*} \times G_{f(d)}$ называется **ярлыком** отображения f .

Кубическая минорная ламинация

Теорема (А. Blokh, L. Oversteegen, R. Ptacek, V.T.)

Ярлыки дендритных кубических многочленов либо не пересекаются, либо совпадают. Они зависят от многочлена полунепрерывно сверху и образуют ламинацию в бидиске.

Эта теорема является частичным обобщением классических результатов Дуади, Хаббарда и Терстона на кубический случай.