

## **ОБ УЧИТЕЛЕ** **АЛЕКСАНДР ДМИТРИЕВИЧ СОЛОВЬЕВ**

Доктор физико-математических наук, профессор,  
лауреат Государственной премии СССР, профессор кафедры  
теории вероятностей механико-математического факультета  
Московского Государственного университета имени М.В.Ломоносова  
(6 сентября 1927г. – 6 апреля 2001г.)

В жизни происходят такие события, значимость которых осознаешь только спустя много лет. Одним из таких событий в своей судьбе я считаю встречу с Александром Дмитриевичем Соловьевым.

Уже, будучи молодым специалистом, проработавшим год после окончания механико-математического факультета МГУ, я в 1958 году перешел работать в НИИ-17 в математическую лабораторию. В это время А.Д.Соловьев тридцатилетний доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ «подрабатывал» в этой лаборатории (так раньше называлась работа по совместительству). Там и состоялась наша первая встреча. Позже выяснилось, что мы могли бы встретиться раньше. Мне рассказывали, что он вел занятия по математическому анализу в некоторых группах нашего курса, но в нашей студенческой группе его не было. Позже сокурсники о нем говорили как о хорошем преподавателе – знающий, справедливый, спокойный.

В математической лаборатории Александр Дмитриевич решал самые разнообразные задачи. Естественно, что решались практические задачи. Следовательно, решения надо было доводить до числа, сложные громоздкие формулы упрощать, оценивать точность полученных приближенных результатов. Вот здесь и проявилась его высочайшая математическая квалификация аналитика. В 1955 году Александр Дмитриевич защитил кандидатскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Проблема моментов для целых аналитических функций», научным руководителем был член-корреспондент АН СССР, профессор А.О.Гельфонд. Следует отметить также плодотворное сотрудничество Александра Дмитриевича с профессором М.А.Евграфовым (см. совместные работы, опубликованные в Докладах Академии наук СССР: «Об одном общем критерии базиса», том 113, №3; «Определение класса сходимости интерполяционного ряда для некоторых задач», №113, №5; «Об одном классе обратимых операторов в кольце аналитических функций», №114, №6), - крупным специалистом по асимптотическим методам (М.А.Евграфов «Асимптотические оценки и целые функции», Москва, 1962 год). Александр Дмитриевич в совершенстве владел тонкими аналитическими методами построения асимптотических разложений и асимптотических оценок, которые он с успехом использовал при исследовании практических проблем.

Перед математиками ставились также проблемы исследования стохастических моделей. При создании радиотехнической аппаратуры решались задачи обработки случайных процессов, построения оценок корреляционных функций и спектральных плотностей. Возникали и задачи оценки надежности разрабатываемой аппаратуры. Передо мной лежит отчет «Математические вопросы проблемы надежности радиоэлектронной аппаратуры», подписанный Александром Дмитриевичем (подлинник подписи) и утвержденный руководством 19 марта 1958 года. Удивляет содержание отчета. Во-первых, чувствуется, что еще нет единой терминологии, принятой в этой науке. Поэтому надежность элемента понимается как вероятность безотказной работы, нет понятия интенсивности отказа, эта функция называется характеристикой надежности. С другой стороны, используется понятие стареющего элемента, строятся оценки снизу вероятности безотказной работы стареющего элемента, которые зависят от числовых характеристик, определяемых по статистическим испытаниям. Это характерно для всех работ Александра Дмитриевича – довести математические формулы до практического использования, поскольку числовые характеристики можно получить по результатам по статистическим испытаниям, оценки снизу дают гарантированное значение показателя. Исследуется надежность систем с произвольной структурой, надежность элементов которой зависит от состояния других.

Содержание простого рядового технического отчета показывает, насколько далеко продвинулся Александр Дмитриевич в постановках, решении и понимании проблем надежности.

В конце 50-х – в начале 60-х годов прошлого столетия происходили количественные накопления результатов в математической теории надежности, были исследованы отдельные математические модели при различных, порой весьма существенных, ограничениях, в определенном смысле сформировалась терминология и специалисты стали говорить на одном языке и лучше понимать друг друга. Александр Дмитриевич принимал активное участие в формировании принципов построения математической теории надежности. Достаточно указать на работу «Математическое обоснование теории надежности», опубликованную в 1958 году (Радиоэлектронная промышленность, №4).

Значительно позже была написана совместная работа Б.В.Гнеденко и А.Д.Соловьева «Математика и теория надежности» (Издательство «Знание». Новое в жизни, науке и технике. Серия «Математика, кибернетика». №10. 1982), в которой авторы изложили историю и свое участие в этом процессе.

В 1960 году руководство лаборатории (Юрий Александрович Архангельский, позже доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики механико-математического факультета МГУ) предложило нам молодым специалистам, проработавшим в лаборатории три года, поступать в аспирантуру. К моей неопишуемой радости Александр Дмитриевич согласился быть моим научным руководителем. Надеюсь, я в дальнейшем не подвел своего учителя, оказавшись его первым

учеником, защитившим кандидатскую и докторскую диссертации. Так началось наше научное сотрудничество и содружество.

С начала 60-х годов Александр Дмитриевич ведет работу с аспирантами. Но именно с начала 70-х годов после возвращения с Кубы (Александр Дмитриевич провел там несколько лет, занимаясь преподаванием и научной работой) работа с аспирантами приобрела массовый характер. Отметим, что более 30 аспирантов под руководством Александра Дмитриевича защитили кандидатские диссертации. Некоторые из них впоследствии стали докторами наук. Назову имена доктора физико-математических наук, профессора О.П.Виноградова, доктора физико-математических наук, профессора А.М.Зубкова, доктора физико-математических наук, профессора О.Сахобова. Александр Дмитриевич никогда не бросал аспирантов на произвол судьбы. Помощь его была конкретной и по существу. Он много времени проводил, беседуя с аспирантом, показывая пути решения задачи, исправляя ошибки. Критика всегда была доброжелательной. Был щедр на передачу знаний и новых результатов. Достаточно сказать, что у меня до 1983 года не было совместных работ с моим учителем.

Если придерживаться хронологии, то начало и середина 60-х годов вмещают в себя формирование замечательного научного коллектива Б.В.Гнеденко, Ю.К.Беляев, А.Д.Соловьев, организацию семинара по математической теории надежности на механико-математическом факультете МГУ, организацию работы кабинета надежности и циклов лекций в Политехническом музее на семинаре по надежности и прогрессивным методам контроля качества продукции. Особо следует отметить написание в 1965 году монографии «Математические методы в теории надежности» (Москва. Наука.1965).

Написание монографии, подводящей итоги развития математической теории надежности, была назревшей необходимостью. Сейчас, оценивая появление этой книги, можно сказать, что она сформировала отечественную математическую теорию надежности, определила дальнейшие пути ее развития. Она является вехой в развитии отечественной математической теории надежности.

Борис Владимирович Гнеденко определил в этой монографии предмет математической теории надежности, выделив жизненные циклы сложных технических систем, определив теоретическую базу теории и конечные практические задачи, стоящие перед ней.

«Общая научная дисциплина, изучающая общие методы и приемы, которых следует придерживаться при проектировании, изготовлении, приемке, транспортировке и эксплуатации изделий для обеспечения максимальной их эффективности в процессе их использования, а также разрабатывающая общие методы расчета качества устройств по известным качествам составляющих их частей» - таково определение Б.В. Гнеденко.

Книга, изданная в 1965 году, с одной стороны, подвела итоги развития отечественной математической теории надежности, с другой

стороны, определила дальнейшие направления развития этой теории, определила связь математической теории надежности с классической теорией вероятностей, теорией случайных процессов, в частности, с теорией массового обслуживания, математической статистикой.

На этой базе в период написания книги интенсивно развивались следующие направления:

- проблемы прогнозирования надежности и долговечности, исследования распределений положительных случайных величин и их свойств (стареющие и молодеющие распределения),
- исследования характеристик надежности различных структур (систем) при заданных распределениях времен безотказной работы отдельных их частей (исследования распределений функций от набора случайных величин) для восстанавливаемых и невосстанавливаемых систем,
- оценка характеристик надежности по результатам испытаний, построение различных планов испытаний.

На этапе формирования теории именно эти направления авторы посчитали главными. Поэтому, положив в основу концепцию формирования математической теории надежности, предложенную Б.В. Гнеденко, авторы изложили в монографии современные (на тот период) результаты по оценке характеристик надежности по результатам испытаний (Ю.К.Беляев) и по исследованию характеристик надежности различных структур с элементами эксплуатации - восстановления отказавших элементов (А.Д.Соловьев).

В разделах монографии, написанных Александром Дмитриевичем, проявились сильные стороны его математической квалификации, квалификации аналитика. Об этом же писал Ю.К.Беляев в журнале «Надежность» (№4, 2006 год), имея в виду время, когда их совместное сотрудничество еще не началось. Приведем эту цитату: «В это время от В.А.Каштанова я узнал, что очень близкие задачи интересуют Александра Дмитриевича Соловьева, которого Виктор Алексеевич считал (а это было на самом деле) непревзойденным виртуозом асимптотических методов математического анализа».

К периоду начала 60-х годов относится начало переговоров Александра Дмитриевича с Андреем Николаевичем Колмогоровым о его переходе на кафедру «Теория вероятностей». Когда этот переход совершился, образовался коллектив авторов, который создал классический труд под названием «Математические методы в теории надежности».

Значительно позже, обзревая свою научную работу, Александр Дмитриевич в письме Игорю Николаевичу Коваленко писал об этапах своей научной деятельности (приведем этот отрывок полностью):

«Моя научная работа шла в несколько этапов:

1. 1960-70-е годы. Построение математической теории надежности;
2. 1970-80-е годы. Создание асимптотической теории, позволяющей оценивать надежность восстанавливаемых систем при малой нагрузке. Главное здесь – доказательство *предельных теорем равномерного типа*, в которых в предельном переходе меняются все параметры и функции,

задающие систему, а сам предельный переход задается некоторым малым функционалом;

3. 1980-90-е годы. Переход от предельных теорем к асимптотически точным двусторонним неравенствам, из которых, в частности, следуют и сами предельные теоремы;

4. В последние годы у меня было несколько тем:

- Изучение восстанавливаемых систем при произвольных дисциплинах обслуживания. Нахождение асимптотически оптимальных дисциплин;
- Оценка надежности восстанавливаемых систем с высокой избыточностью и конечной нагрузкой ».

Как видно из приведенной цитаты, четких границ у этих периодов нет, они пересекаются. Для нас будет важно выделить главные идеи и достижения Александра Дмитриевича в указанные годы.

В этом же письме Александр Дмитриевич в качестве основной работы первого периода указывает монографию «Математические методы в теории надежности», многократно переиздававшуюся в различных странах. Известны 7 изданий этой монографии в Москве, Берлине, Бухаресте, Нью-Йорке, Будапеште и в Японии за период 1965-1972 годы.

Кроме того, в этот период было написано более 40 статей. Если оценить в целом места издания и характер публикаций, то прослеживается глубокая заинтересованность практиков (представителей промышленности) в теоретических исследованиях математиков. Основными изданиями, в которых опубликованы работы Александра Дмитриевича, являются ведомственные журналы: «Радиоэлектронная промышленность», «Вопросы радиоэлектроники», «Автоматика и вычислительная техника». Три статьи опубликованы в сборнике статей «Кибернетику – на службу коммунизму» (1964 год), в котором собраны материалы докладов, сделанных на трех научных семинарах – по теории надежности (секция надежности Научного совета по кибернетике при Президиуме АН СССР), по теории массового обслуживания (механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова), по теории надежности (совместный семинар механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова и НТО радиотехники и электросвязи им. А.С.Попова). В академических журналах «Известия АН СССР, техническая кибернетика» и «Известия АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика» также опубликованы работы Александра Дмитриевича того периода.

По второму и третьему периодам творческой деятельности АД отнесем монографию «Вопросы математической теории надежности», Москва, Радио и связь, 1983 год. В предисловии к этой монографии Б.В. Гнеденко, характеризуя разделы, принадлежащие перу Александра Дмитриевича, написал: «Автору удалось найти изящную манеру изложения, позволившую в сравнительно небольшом объеме вложить обширный материал. Заслуживает упоминания и то обстоятельство, что предположений об экспоненциальном распределении длительности безотказной работы элементов или же

длительности восстановления автор не делает и при весьма широких предпосылках ему удалось получить общие результаты. Важно также и то, что в предельных теоремах он получил весьма точные двусторонние неравенства, которые можно с успехом использовать в практических ситуациях».

Заметим, что в книге 1983 года помимо «традиционных» разделов и направлений исследований, которые написали А.Д.Соловьев и Ю.К.Беляев, дополнительно появились и другие разделы. И.Н.Коваленко дополнил материал подразделом «Методы статистического моделирования» (глава «Многомерные Марковские процессы, описывающие сложные системы, и их статистическое моделирование» и глава «Аналитико-статистический метод расчета характеристик высоконадежных систем»). Появился и раздел «Задачи оптимизации надежности и эффективности функционирования», написанный Е.Ю.Барзиловичем, В.А.Каштановым и И.А.Ушаковым. Если в первоначальных работах качество (эффективность) оценивалось распределением времени безотказной работы или математическим ожиданием этого времени, то в более поздних работах исследовались другие показатели, которые определялись как функционалы, построенные на траекториях случайных процессов, описывающих эволюцию технической системы. Решение проблемы завершалось оптимизацией этих функционалов (показателей).

С середины 70-х годов до середины 80-х годов Александр Дмитриевич опубликовал около 30 работ, многие из них написаны совместно с аспирантами.

Отметим, что Александр Дмитриевич публикует в этот период свои результаты в издательстве «Знание». Это связано с тем, в конце 60-х годов в помещении Политехнического музея в Москве начинает работать кабинет надежности, в котором работает семинар по надежности и прогрессивным методам контроля качества продукции, в котором математики проводят консультации для представителей промышленности по практическим проблемам надежности, возникающим при разработке различной аппаратуры. В большой аудитории Политехнического музея организуются циклы лекции по надежности для инженеров. Материалы лекций издаются отдельными брошюрами. Это были обзоры математических методов в теории надежности, объем материалов составлял 40-50 страниц. Укажем на три выпуска под названием «Основы математической теории надежности» (Москва, Знание, 1975 год). Конечно, математические результаты адаптируются применительно к аудитории, но это придает теории практическую направленность. Общение с инженерной аудиторией позволило прочувствовать прикладную проблематику, описать новые модели, сформулировать новые проблемы. (Заметим, Александр Дмитриевич имел большой опыт чтения лекций на механико-математическом факультете МГУ для специалистов, имеющих высшее инженерное образование и желающих повысить свою математическую квалификацию, для так называемого «инженерного потока»). Приведем название одной из работ

Александра Дмитриевича, опубликованной после прочтения курса лекций инженерам: «Эвристический вывод характеристик надежности резервных систем с быстрым восстановлением» (Москва, Знание, 1968 год). Такой подход Александра Дмитриевича к изложению материала свидетельствует о стремлении дать практикам инструмент, которым легко можно было бы воспользоваться при решении практических задач.

Практическая направленность математических работ Александра Дмитриевича прослеживается постоянно. Для него основной задачей было не только получить какую-то зависимость (формулу, уравнение, предельную теорему), но и показать, как можно этим результатом воспользоваться, довести исследование до числа и выработать практические рекомендации. Он стремился сформулировать простые достаточные условия, проверка которых позволяла этот математический результат использовать на практике.

Как отмечалось выше, исследования Александра Дмитриевича в 80-90-ые годы касались тонких вопросов асимптотического анализа моделей массового обслуживания и надежности. Он решает более сложные задачи построения асимптотически точных двусторонних оценок, которые позволяют не только получить предельные значения исследуемых характеристик, но и определить скорости сходимости. Решение этих задач связано с проблемой суммирования случайного числа случайных слагаемых. В книге «Борис Владимирович Гнеденко в воспоминаниях учеников и соратников» (URSS. Москва, 2006) И.Н.Коваленко написал: «Большой заслугой Бориса Владимировича было привнесение в математическую теорию надежности методов теории суммирования независимых случайных величин. Это стимулировало создание нового направления – предельных теорем теории резервированных систем в «треугольной» схеме. Наибольший вклад в развитие этого направления внес А.Д.Соловьев со своими учениками...».

Выше указывалось на работы, посвященные построению асимптотически точных двусторонних оценок исследуемых характеристик. В определенном смысле этапной работой являются главы, написанные Александром Дмитриевичем в монографии 1983 года. Эти материалы подвели итоги исследований, которые начались публикациями 1976-1977 годов.

В этой книге приведены многочисленные примеры, в которых можно использовать эти двусторонние оценки:

- Нагруженное дублирование с восстановлением;
- Облегченное дублирование с профилактиками;
- Временное резервирование;
- Нагруженное дублирование с восстановлением.

Упомянем написанные совместно с О.Сахобовым работы «Двусторонние оценки надежности восстанавливаемых систем» (Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, №5, 1977), «Двусторонние оценки надежности в общей модели резервирования с одной ремонтной единицей» (Известия АН СССР. Техническая кибернетика, №4, 1977), «Двусторонние

оценки для вероятности отказа системы на одном периоде регенерации» (Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, №2, 1977).

В 90-е годы Александр Дмитриевич опубликовал ряд работ по оценкам надежности различных систем. Совместно с Д.Г. Константиноидисом написаны работы «Равномерная оценка надежности сложной восстанавливаемой системы с неограниченным числом ремонтных единиц» (Вестник МГУ, серия Математика, Механика. №3, 1991), «Оценка надежности сложной восстанавливаемой системы с неограниченным числом ремонтных единиц» (Теория вероятностей и ее применения, том 37, выпуск 1, 1992), «Оценка надежности в модели холодного резервирования с восстановлением в случае неограниченного числа ремонтных единиц» (совместно с А.П.Поляковым, Вестник МГУ, серия Математика, Механика. №5, 1992), «Оценка среднего времени жизни восстанавливаемых систем» (совместно с Н.Г.Карасевой, Вестник МГУ, серия Математика, Механика. №5, 1998).

Все упомянутые в последних работах соавторы Александра Дмитриевича были его аспирантами, поэтому, очевидно, что все математические идеи, изложенные в этих работах, принадлежат именно руководителю.

Исследователи давно увидели связь моделей надежности и моделей массового обслуживания. Александр Дмитриевич, исследуя модели надежности восстанавливаемых систем, ряд своих работ посвятил анализу различных дисциплин обслуживания и восстановления.

В этих работах решается проблема поиска оптимальных дисциплин восстановления (обслуживания), что принципиально важно с практической точки зрения. Одной из первых работ в этом направлении была статья «Оптимальное обслуживание восстанавливаемых систем» (совместно с В.В.Козловым. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, №№3,4, 1977). Затем последовала работа «О системе с дисциплиной обслуживания первым требования с минимальной оставшейся длиной» (совместно с А.В.Печинкиным и С.Ф.Яшковым. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, №5, 1979). Отметим также работу «Анализ системы  $M/G/1/\infty$  для различных дисциплин обслуживания» (Теория массового обслуживания. Труды всесоюзной школы-семинара. М. ВНИИСИ, 1881), в которой исследован широкий спектр дисциплин обслуживания, дан обзор результатов и приведен перечень характеристик, полученных в замкнутом виде для различных дисциплин.

Кроме работ, посвященных анализу моделей массового обслуживания и надежности, Александр Дмитриевич написал несколько историко-математических работ. Отметим работы, связанные с историей создания асимптотических методов анализа, посвященным проблематике, очень близкой его научным интересам. К таковым относятся работы «Об истории создания метода перевала» (совместно с С.С.Петровой. СПб. Историко-математические исследования, выпуск 35, 1994), «П.А.Некрасов и центральная предельная теорема теории вероятностей» (М. Историко-

математические исследования, вторая серия, выпуск 2(37), 1997), «Асимптотические методы Лапласа» (М. Историко-математические исследования, вторая серия, выпуск 4(39), 1999).

Далее перейдем к характеристике содержания работ по математической теории надежности и идеям, заложенным в них.

Первые работы касались построения вероятностных характеристик надежности систем по характеристикам ее отдельных частей. Другими словами, речь шла об исследовании функций от случайных величин. Однако, при исследовании процесса функционирования, когда в модель включено восстановление отказавших подсистем, возникает необходимость эволюцию системы рассматривать во времени. Поэтому при описании модели используются случайные процессы. В первых работах Александра Дмитриевича используются Марковские процессы. Относительно одной из них (1964 год) было написано: «Большая работа А.Д.Соловьева «О резервировании без восстановления» представляет собой серьезное исследование, в котором систематически изложена теория резервирования и далеко продвинуто исследование многих вопросов на базе случайных процессов гибели и размножения» (см. материал от редакторов в сборнике статей «Кибернетику – на службу коммунизму»).

Александр Дмитриевич стремился ставить и решать задачи по возможности в общих предположениях относительно исходных предположений. Там, где можно было отказаться от некоторых специальных предположений (например, экспоненциальности некоторых исходных распределений), задача решалась в общих предположениях. При таком подходе очень редко удается получить результат в замкнутой форме. Тогда работала высокая эрудиция Александра Дмитриевича, как специалиста по асимптотическим методам. В его работах появляются термины асимптотическое распределение, редкое событие, быстрое восстановление и тому подобное. И все это при исследовании моделей надежности. Приведем здесь названия некоторых из этих работ: «Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента» (Известия АН СССР, Техническая кибернетика, №5, 1964), «Одно комбинаторное тождество и его применение к задаче о первом наступлении редкого события» (Теория вероятностей и ее применения, т. XI, вып. 2, 1966), «Резервирование с быстрым восстановлением» (Известия АН СССР, Техническая кибернетика, №1, 1970), «Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерирующем процессе» (Известия АН СССР, Техническая кибернетика, №6, 1971), «Асимптотический анализ послеотказовых характеристик надежности» (Труды III Всесоюзной школы совещания по теории массового обслуживания, том 1, МГУ, 1976).

Ряд работ по асимптотическому анализу касалось моделей массового обслуживания. Выше упоминалось о связи моделей надежности и массового обслуживания.

В 1972 году Александр Дмитриевич в совете механико-математического факультета МГУ с успехом защитил диссертацию на

соискание ученой степени доктора физико-математических наук «Системы массового обслуживания с быстрым обслуживанием». Приведем цитату из автореферата этой диссертации, в которой в полной мере проявляется характерные особенности Александра Дмитриевича как математика. Вот что он написал в автореферате диссертации.

Отметим две характерные черты работы:

1. Почти везде предельные теоремы имеют равномерную форму, другими словами, в предельном переходе меняются все исходные распределения и параметры, а топология предельного перехода задается некоторым малым функционалом от распределений и параметров;

2. В каждой предельной теореме искались наиболее эффективные условия, то есть условия, выраженные явно и достаточно просто через исходные характеристики.

Исследование многочисленных конкретных моделей массового обслуживания и надежности позволило в конечном итоге выработать общую базовую математическую модель случайного процесса, описывающего эволюцию исследуемой системы, по которому можно судить об эффективности ее функционирования.

Таковым оказался *регенерирующий случайный процесс*, для которого на периоде регенерации может наступить в какой-то момент некоторое событие. В конкретных моделях это событие можно трактовать как первую потерю требования, отказ системы и т.п. неблагоприятные события. Уже в монографии 1983 года мы находим параграфы и разделы «Предельные теоремы для регенерирующих процессов, точное распределение момента первого наступления события, регенерирующие процессы специального типа, оценка вероятности наступления события».

Чтобы продемонстрировать глубокие идеи Александра Дмитриевича, проведем анализ статьи «Одна общая модель резервирования с восстановлением», написанной совместно с Д.Б.Гнеденко (Известия АН СССР. Техническая кибернетика, №6, 1974 год).

В работе исследуется система, состоящая из  $n+1$ -го элемента. При отказах элементы восстанавливаются. Для восстановления имеется  $r$  ремонтных бригад, длительности восстановления независимые случайные величины с произвольным распределением  $G(x)$ . Кроме этого, относительно структуры системы предполагается, что для ожидания ремонта предусмотрено  $n-r$  мест. Если в момент времени  $t$  в системе  $k$  отказавших элементов,  $\xi(t) = k$ , то следующий отказ появляется через случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром  $\lambda_k$ . Отказ системы наступает в момент отказа  $n+1$ -го элемента,  $\zeta(t) = n+1$ .

Нетрудно заметить, что описанная модель надежности полностью совпадает с системой массового обслуживания, имеющей  $r$  обслуживающих приборов,  $n-r$  мест в очереди, и для которой интенсивность входного потока зависит только от числа требований в системе. Неблагоприятное событие это первая потеря требования.

В силу того, что времена обслуживания распределены произвольно и в одно время может обслуживаться несколько требований, случайный процесс  $\zeta(t)$  - число требований в системе в момент  $t$  не обладает хорошими свойствами (например, марковское свойство), позволяющими привлечь известные математические методы. Единственное свойство, которое может быть использовано, это свойство регенерации. Моменты регенерации – моменты освобождения системы от требований. Периоды регенерации имеют две составляющие – случайный период с экспоненциальным распределением и период занятости, когда в системе имеются требования.

Для такого регенерирующего процесса доказана теорема

$$\lim_{\lambda_0 T_1 \rightarrow 0} P\{\lambda_0 q \tau > x\} = e^{-x},$$

где  $q$  – вероятность потери требования на одном периоде регенерации,  $T_1$  – математическое ожидание периода занятости,  $\tau$  – момент первой потери требования. Однако использовать теорему в представленном виде трудно, так как нужно через исходные характеристики выразить математическое ожидание периода занятости и вероятность потери требования на одном периоде регенерации.

Поэтому формулируются более простые достаточные условия сходимости к экспоненциальному распределению: Если  $T = \int_0^{\infty} x dG(x) \rightarrow 0$  то.

$P\{\lambda_0 q \tau > x\} \rightarrow e^{-x}$ . Отметим оригинальный метод доказательства этой теоремы – построение *мажорирующего процесса*. Строится случайный процесс  $\bar{\zeta}(t)$  - число требований в момент  $t$  для одноканальной системы массового обслуживания с бесконечной очередью, в которую поступает Пуассоновский поток требований с параметром  $\lambda = \max_{0 \leq k \leq n} \lambda_k$ . Утверждается, что процесс  $\bar{\zeta}(t)$  мажорирует процесс  $\zeta(t)$  в том смысле, что любая реализация процесса  $\zeta(t, \omega)$  не превосходит *соответствующую* реализацию процесса  $\bar{\zeta}(t, \bar{\omega})$ ,  $\zeta(t, \omega) \leq \bar{\zeta}(t, \bar{\omega})$ . Здесь нужно пояснить, что значит соответствие реализаций двух процессов. Реализации случайных процессов  $\zeta(t, \omega)$  и  $\bar{\zeta}(t, \bar{\omega})$  определяются интервалами между соседними моментами поступления требований  $\vec{t} = \{t_k, k \geq 1\}$  и временами обслуживания каждого требования  $\vec{\tau} = \{\tau_k, k \geq 1\}$ . Если эти последовательности одинаковы, то выполняется выписанное выше неравенство в силу того, что во второй модели функционирует один обслуживающий прибор. Аналогичное неравенство справедливо для периодов занятости  $v_1(\vec{t}, \vec{\tau}) \leq v_2(\vec{t}, \vec{\tau})$  первой и второй моделей. Очевидно, период занятости является невозрастающей функцией интервалов  $t_k$ . Поэтому аналогичные неравенства справедливы для математических ожиданий периодов занятости при условии, что распределения интервалов между моментами поступления требований имеют экспоненциальные распределения с параметрами  $\lambda \geq \lambda_k$ . Это и доказывает теорему при просто проверяемых условиях.

Однако остается открытым вопросом об определении вероятности  $q$  потери требования на периоде регенерации. И здесь предложено оригинальное решение. Доказывается, что при определенных условиях вероятность  $q$  эквивалентна вероятности  $q_0$  потери требования по монотонной траектории, когда на периоде регенерации не было обслужено ни одного требования (метод монотонной траектории). В конечном итоге получаем очень красивый результат  $\lim_{\frac{m_{n+1}}{m_1^n} \rightarrow 0} P\{\lambda_0 I \tau > x\} = e^{-x}$ , где

$$I = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_0^{\infty} \frac{\{ \int_0^x [I - G(y)] dy \}^{r-1} x^{n-r}}{(r-1)!(n-r)!} [I - G(x)] dx, \quad m_k = \int_0^{\infty} x^k dG(x) \quad \text{и легко проверяемые}$$

условия его выполнения. Приводятся и частные случаи: при  $r=n$  справедливо равенство  $P\{\lambda_0 q \tau > x\} \rightarrow e^{-x}$ , при  $r=1$  справедливо равенство  $I = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{n!} m_n$ .

Этот подробный анализ показывает глубину идей, предложенных А.Д.Соловьевым, а использование этих идей при асимптотическом анализе других моделей свидетельствует об их эффективности.

Завершая эти заметки, хотелось бы сказать, что в жизни Александр Дмитриевич Соловьев был веселым и доброжелательным человеком, относящимся с уважением к любому собеседнику. Он играл на гитаре, знал много историй и анекдотов, в компании был душой общества. Любил подшутить. В 1967 году в Ташкенте на среднеазиатском рынке он предлагал всем попробовать горький зеленый перец и тут же предлагал какой-нибудь фрукт заесть тому, кто попадался на его шутку.

Время неумолимо летит вперед. Скоро девять лет как ушел от нас Александр Дмитриевич. Сохраним память об этом замечательном человеке и будем благодарны ему за все, что он сделал для нас.